

# Formulación estabilizada de elementos finitos triangulares y tetraédricos para problemas de incompresibilidad en grandes deformaciones

Quino Valverde

Departamento de Ingeniería - Sección Ingeniería Mecánica  
Pontificia Universidad Católica del Perú  
Av. Universitaria cdra 18 s/n, San Miguel, Apdo 100  
Lima, Perú  
e-mail: qvalver@pucp.edu.pe

Michele Chiumenti, Carlos Agelet de Saracibar y Miguel Cervera

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)  
Edificio C1, Campus Norte, UPC  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34 93 401 07 94, 401 64 95, 401 64 92; Fax: 34 93 401 65 17  
e-mail: chiument@cimne.upc.edu, agelet@cimne.upc.es, cervera@cimne.upc.edu

## Resumen

Se presenta una formulación en multiescalas del método de elementos finitos capaz de estabilizar el comportamiento de elementos mixtos en problemas de elasticidad y de plasticidad incompresibles en grandes deformaciones. Esta formulación se fundamenta en el concepto de las sub-escalas ortogonales (*OSGS*) y se aplica a elementos triangulares y tetraédricos mixtos, con interpolaciones de desplazamientos y presión continuas. La formulación permite eludir la *condición de estabilidad de Babuška-Brezzi*, y ofrece como principal ventaja la posibilidad de utilizar interpolaciones lineales en elementos mixtos triangulares y tetraédricos, muy convenientes en aplicaciones de interés práctico debido a su versatilidad para la generación de mallas sobre configuraciones geométricas complejas. Se explican tanto las consideraciones empleadas en el planteamiento, como los principales aspectos de implementación. Una de las contribuciones más relevantes de esta formulación es la eficacia y originalidad de la aproximación propuesta para el parámetro de estabilización. Finalmente, mediante ejemplos de simulación se muestra el buen comportamiento de los elementos obtenidos en comparación con elementos estándar y *Q1P0*.

**Palabras clave:** *Elementos finitos mixtos estabilizados, sub-escalas ortogonales, incompresibilidad, plasticidad, grandes deformaciones.*

## A STABILIZATION TECHNIQUE FOR TRIANGULAR AND TETRAHEDRAL FINITE ELEMENTS IN INCOMPRESSIBLE PROBLEMS WITH FINITE DEFORMATIONS

## Summary

The use of stabilization methods is becoming an increasingly well-accepted technique due to their success in dealing with numerous numerical pathologies that arise in a variety of applications in computational mechanics. In this paper a multiscale finite element method technique to deal with pressure stabilization of nearly incompressibility problems in nonlinear solid mechanics with finite deformations is presented. A J2-flow theory plasticity model with finite deformations is considered. A mixed formulation involving pressure and displacement fields is used as starting point. Within the finite element discretization setting, continuous linear interpolation for both fields is considered. To overcome the *Babuška-Brezzi stability condition*, a multiscale stabilization method based on the orthogonal subgrid scale (*OSGS*) technique is introduced. A suitable nonlinear expression of the stabilization parameter is proposed. The main advantage of the method is the possibility of using linear triangular or tetrahedral finite elements, which are easy to generate and, therefore, very convenient for practical industrial applications.

**Keywords:** *Finite element, incompressibility, plasticity, large strains, mixed formulation, stabilization technique, orthogonal sub-scales.*

## INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos ofrece en general buenos resultados en una gran variedad de problemas en la ingeniería. Sin embargo, se encuentran importantes dificultades en la aplicación del método en diversas aplicaciones de interés práctico. Notablemente, en problemas en medios incompresibles la *formulación estándar en desplazamientos* ofrece pésimos resultados. En mecánica de sólidos en régimen elástico, por ejemplo, presentan comportamiento incompresible los materiales elastómeros y los sólidos porosos saturados. Por otro lado, en régimen plástico los metales presentan comportamiento prácticamente incompresible en el transcurso de la fluencia. De hecho, la hipótesis común a los modelos de plasticidad J2, de amplio uso en la simulación numérica de metales, es que las deformaciones plásticas se desarrollan de manera isocórica. En consecuencia, es necesario conocer las causas que originan estos inconvenientes del método y desarrollar formulaciones capaces de brindar resultados satisfactorios.

Al plantear un problema mediante el método de elementos finitos se adopta un espacio de funciones de prueba, concretamente funciones de interpolación nodal, para aproximar la solución correspondiente al medio continuo. En esencia, lo que se hace al introducir esta restricción en la solución, es convertir un problema de infinitos grados de libertad en un problema discretizado, cuya solución tiene un número finito de grados de libertad, es decir, es más rígida que la real. El método de elementos finitos permite encontrar la mejor aproximación a la solución dentro del espacio de funciones de prueba. Sin embargo, en ciertas situaciones este espacio resulta ser demasiado pobre e incapaz de aproximar el comportamiento del medio continuo. Como consecuencia de ello, la solución del campo de desplazamientos ofrecida por el espacio de funciones de prueba, que en general es infraestimada, en casos extremos podría llegar a ser cercana a la nula. A este fenómeno se le denomina bloqueo. En aplicaciones en medios incompresibles los elementos finitos de bajo orden de interpolación de la formulación estándar en desplazamientos presentan este defecto, que se caracteriza por la dramática subestimación de las deformaciones y por la imposibilidad de calcular la tensión media, también conocida como presión<sup>1</sup>.

En la literatura que aborda este problema se pueden encontrar varias estrategias basadas en *formulaciones mixtas* o en la *formulación de deformaciones de mejora (enhanced assumed strains)*, *EAS*. La formulación *EAS* plantea la incorporación de modos de deformación adicionales con respecto a los elementos estándar, de acuerdo con ciertas condiciones, con la finalidad de eliminar el fenómeno de bloqueo tanto en problemas de incompresibilidad como en problemas de flexión<sup>2,3</sup>. Por otro lado, la formulación mixta considera la presión como variable independiente adicional a los desplazamientos. Introduce de esta manera mayor flexibilidad y ofrece un marco natural para el desarrollo de elementos para problemas en medios incompresibles. Sin embargo, por un lado las formulaciones mixtas están restringidas por la *condición de estabilidad de Babuška-Brezzi*<sup>4</sup>, que establece los requisitos de compatibilidad entre las funciones de interpolación de los campos involucrados y descarta los de igual orden, en particular, las interpolaciones lineal/lineal. Por otro lado, la formulación *EAS* tiene importantes limitaciones, puesto que adolece de ciertas inestabilidades numéricas. Además, esta formulación y las que se derivan de ella no son aplicables a elementos triangulares o tetraédricos lineales<sup>5</sup>, que son de gran interés práctico por su bajo costo computacional y su versatilidad para la generación de mallas sobre configuraciones geométricas realistas. Estas ventajas han motivado la propuesta de *formulaciones mixtas estabilizadas* adecuadas a este tipo de elementos<sup>6,7,8,9</sup>.

El trabajo que se presenta a continuación propone una solución alternativa al problema de incompresibilidad en grandes deformaciones en mecánica de sólidos, tanto en el caso de incompresibilidad elástica como en plasticidad tratada mediante modelos J2. La formulación se desarrolla en el marco del método de las sub-escalas, propuesto por T.J.R.

Hughes<sup>10,11</sup> y, en particular, en el método de las sub-escalas ortogonales, propuesto en el contexto de la mecánica de fluidos por R. Codina<sup>12,13,14</sup>. Recientemente, los autores del presente trabajo han aplicado este método en relación con la mecánica de sólidos en problemas de pequeñas deformaciones<sup>15,16,17,18</sup>. La efectividad y robustez de la técnica ha motivado la extensión a problemas en grandes deformaciones.

En siguiente apartado se presentan las ecuaciones que definen el problema mecánico, planteado como un problema en multiescalas. Más adelante se presenta el método de estabilización de las sub-escalas ortogonales en el problema de incompresibilidad inducido por el modelo de plasticidad J2. Finalmente, mediante diversas simulaciones numéricas se compara el comportamiento de los elementos de la formulación propuesta, tanto con elementos de la formulación estándar como con elementos *Q1P0*.

## FORMULACIÓN MIXTA DEL PROBLEMA DE INCOMPRESIBILIDAD

Antes de presentar la formulación es conveniente introducir previamente la notación empleada. Sea  $\Omega$  un dominio abierto en  $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ , donde  $n_{\text{dim}}$  es el número de dimensiones del espacio,  $\bar{\Omega}$  es su clausura, y su contorno  $\Gamma$  es tal que  $\Gamma = \partial_u \Omega \cup \partial_t \Omega$  y  $\partial_u \Omega \cap \partial_t \Omega = \emptyset$ . El espacio de funciones cuyo cuadrado es integrable en  $\Omega$  es  $L^2(\Omega)$ , y  $H^m$  es el espacio de funciones cuyas derivadas hasta un orden  $m \geq 0$  (entero) pertenecen a  $L^2(\Omega)$ . Se utilizan caracteres en negrita para las respectivas contrapartes vectoriales de estos espacios. Los productos internos  $L^2$  en  $\Omega$  y  $\partial\Omega$  se denotan por  $(\cdot, \cdot)$  y  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ , respectivamente. En lo sucesivo se entenderá la ortogonalidad con respecto a este producto.

### Forma fuerte

Se considera un modelo elasto-plástico basado en un modelo de plasticidad J2, cuya respuesta en tensiones se caracteriza mediante la función de energía<sup>19</sup>

$$W(J, \bar{\mathbf{b}}^e) = U(J) + \bar{W}(\bar{\mathbf{b}}^e) \quad (1)$$

donde  $U$  y  $\bar{W}$  son las componentes desacopladas de  $W$ , volumétrica y desviadora, respectivamente.  $J$  es el determinante del tensor gradiente de deformaciones  $\mathbf{F}$ , que se descompone multiplicativamente como  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  en sus componentes elástica y plástica  $\mathbf{F}^e$  y  $\mathbf{F}^p$ ;  $\bar{\mathbf{b}}^e = J^{-2/3} \mathbf{b}^e$  es la componente isocórica del tensor elástico izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}$ . Las funciones utilizadas específicamente son:

$$U(J) = \frac{1}{2} \kappa \log^2(J) \quad (2)$$

$$\bar{W}(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} \mu \left( \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}^e] - 3 \right) \quad (3)$$

donde  $\kappa$  y  $\mu$  son los módulos volumétrico y de cizallamiento, respectivamente.

A partir de esta función de energía se puede derivar la expresión del tensor de tensiones de Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p) = T \mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (4)$$

donde la presión de Kirchhoff  $T := 1/3 \text{tr}[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)]$  considerada como variable independiente, y la componente desviadora  $\mathbf{s}(\mathbf{u}) := \text{dev}[\boldsymbol{\tau}(\mathbf{u}, p)]$ , son

$$T = JU'(J) \quad (5)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e] \quad (6)$$

donde  $U'$  denota la derivada de  $U$  con respecto a  $J$ . En adelante se considera que  $J = J(\mathbf{u})$  es función del campo de desplazamientos.

La forma fuerte del problema de incompresibilidad en mecánica de sólidos en formulación mixta consiste en: hallar el desplazamiento  $\mathbf{u}$  y la presión de Kirchhoff  $\mathbf{T}$ , tales que:

$$J \nabla (J^{-1}T) + J \nabla \cdot (J^{-1}\mathbf{s}(\mathbf{u})) + \mathbf{f} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (7)$$

$$T - JU'(J) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

de acuerdo con las condiciones de contorno prescritas en desplazamientos y tracciones, respectivamente,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $\partial_u \Omega$  y  $\bar{\mathbf{t}}^N = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}$  en  $\partial_t \Omega$ , donde  $\mathbf{N}$  es la normal exterior a  $\partial_t \Omega$ . La fuerza másica prescrita por unidad de volumen de referencia es  $\mathbf{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$  y  $\nabla(\cdot)$  denota el operador gradiente espacial.

El problema definido en (7) y (8) se puede expresar en notación compacta como: hallar  $\mathbf{U}$  tal que:

$$L(\mathbf{U}) = F \quad (9)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $L(\mathbf{U})$  y  $F$  se definen como

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} -J \nabla (J^{-1}T) - J \nabla \cdot (J^{-1}\mathbf{s}(\mathbf{u})) \\ -T + JU'(J) \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

### Forma débil

Para el planteamiento de la forma débil se definen apropiadamente los espacios de funciones de los campos de desplazamientos y presión de Kirchhoff, respectivamente  $V = \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $Q = L^2(\Omega)$ ; los espacios correspondientes a sus funciones de ponderación son  $V_0 = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = 0 \text{ en } \partial_u \Omega\}$  y  $Q = \{q \in L^2(\Omega)\}$ . De acuerdo con lo anterior, la expresión compacta de la forma débil del problema definido en (9) consiste en: hallar  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}, p]^T \in W = V \times Q$  tal que para todo  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}, q]^T \in W_0 = V_0 \times Q$ :

$$(L(\mathbf{U}), \mathbf{W}) = (F, \mathbf{W}) \quad (11)$$

De acuerdo con las definiciones anteriores, la forma explícita correspondiente es:

$$(T, \nabla \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{s}(\mathbf{u}), \nabla^s \mathbf{w}) = l(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V_0 \quad (12)$$

$$-(T, q) + (JU'(J), q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (13)$$

donde el operador  $l(\mathbf{w}) := (\mathbf{f}, \mathbf{w}) + (\bar{\mathbf{t}}^N, \mathbf{w})_{\partial \Omega}$ :

Este problema se puede expresar en notación compacta como: hallar  $\mathbf{U} \in W$  tal que para todo  $\mathbf{W} \in W_0$ :

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = L(\mathbf{W}) \quad (14)$$

donde

$$B(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = (T, \nabla \cdot \mathbf{w}) + (\mathbf{s}(\mathbf{u}), \nabla^s \mathbf{w}) - (T, q) + (JU'(J), q) \quad (15)$$

$$L(\mathbf{W}) = l(\mathbf{w}) \quad (16)$$

## Discretización

El planteamiento canónico por elementos finitos implica definir una partición regular  $P_h$  de  $\Omega$  en  $n_{elm}$  sub-dominios  $\Omega_e$  y construir los correspondientes espacios de dimensión finita asociados a ésta para realizar las aproximaciones. Estos son:  $V_h \in V$ ,  $Q_h \in Q$  y  $W_h = V_h \times Q_h$ . Las funciones en  $V_h$  son continuas, mientras que las funciones en  $Q_h$  no necesariamente; asimismo, los polinomios de aproximación pueden ser de diferente orden. De esta manera, el problema discretizado consiste en: hallar  $\mathbf{U}_h \in W_h$  tal que para todo  $\mathbf{W}_h \in W_{h,0}$ :

$$B(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h) \quad (17)$$

La formulación mixta permite evaluar la presión de Kirchhoff como una variable primaria. Esta flexibilidad adicional con respecto a la formulación irreducible no es ilimitada; existen restricciones de compatibilidad entre los campos de interpolación de las formulaciones mixtas fuera de las cuales no cabe esperar de éstas un buen comportamiento. Concretamente, para garantizar la respuesta estable de la presión en esta formulación mixta se debe verificar la *condición de Babuška-Brezzi*<sup>4</sup>. Las interpolaciones de desplazamientos y presión de igual orden, en particular la interpolación lineal/lineal, no cumplen esta condición, y como consecuencia no ofrecen un buen comportamiento. Con la finalidad de eludir esta condición y obtener una adecuada respuesta de la presión, los métodos de estabilización modifican la forma débil (17), introduciendo términos dependientes de la malla.

En la siguiente sección se plantea el problema en el marco del método de las sub-escalas, aplicado como técnica de estabilización, con el objetivo de obtener elementos mixtos con interpolaciones lineal/lineal con comportamiento estable.

## FORMULACIÓN EN MULTIESCALAS

### Planteamiento en multiescalas

La idea fundamental que introduce el *método de las sub-escalas* es que al definir una malla de elementos finitos quedan establecidos dos niveles de resolución; un nivel corresponde a la malla y será aproximado por elementos finitos y el otro, denominado *sub-escala*, que no podrá ser captado<sup>10,11</sup>. Si bien se admite que existe una componente de la solución que no puede ser resuelta, se debería aproximar al menos *el efecto* de la sub-escala sobre la componente que se resuelve numéricamente. De acuerdo con esto, la causa de diversos problemas de estabilidad numérica sería el no considerar este efecto en la formulación. En este contexto, considerando que además de la componente aproximada por la solución de elementos finitos  $\mathbf{U}_h \in W_h$  existe una componente no resuelta  $\tilde{\mathbf{U}}$ , la solución exacta se puede expresar como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}} \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ T_h \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{T} \end{bmatrix} \quad (19)$$

La componente  $\mathbf{U}_h$  se puede considerar como la proyección de la solución exacta sobre el espacio de elementos finitos, mientras que la componente  $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{W}$ , donde  $\tilde{W}$  es el *espacio de las sub-escalas*. De esta manera, se considera que el espacio  $W$  en el que se encuentra la solución exacta se puede descomponer como  $W = W_h \oplus \tilde{W}$ ; es decir,  $\tilde{W}$  es un espacio complementario de  $W_h$  en  $W$  en el que se representan las sub-escalas de la solución.

El planteamiento en multiescalas del problema expresado en (14) se escribe como: hallar  $\mathbf{U}_h \in W_h$  y  $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{W}$  tales que:

$$B(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h) \quad \forall \mathbf{W}_h \in W_{h,o} \quad (20)$$

$$B(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = L(\tilde{\mathbf{W}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{W}_0 \quad (21)$$

A partir de la ecuación (21) se obtendrá una relación aproximada entre la sub-escala  $\tilde{\mathbf{U}}$  y la solución por elementos finitos  $\mathbf{U}_h$ , con la finalidad de considerar los efectos de  $\tilde{\mathbf{U}}$  en las expresiones correspondientes a  $W_h$ .

En el presente trabajo se considera  $\tilde{T} = 0$ ; es decir, se consideran sólo sub-escalas de desplazamientos. Como se mostrará en las simulaciones, esto será suficiente para lograr una formulación con comportamiento estable. De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones (20) y (21) se expresan de manera explícita como:

$$(T_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla^s \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,o} \quad (22)$$

$$(J(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) U'(J(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}})) - T_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_{h,o} \quad (23)$$

$$(T_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) + (\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}), \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) = l(\tilde{\mathbf{w}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{V}_0 \quad (24)$$

Nótese que la expresión (21) en el espacio de las sub-escalas  $\tilde{W}$  involucra sólo la ecuación (24), en sub-escalas de desplazamientos, dado que el campo de presión correspondiente se ha considerado nulo.

Se introducen a continuación las linealizaciones de la presión de Kirchoff y de la tensión desviadora,  $\mathbf{J}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}) U'(\mathbf{J}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}))$  y  $\mathbf{s}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u})$ , respectivamente. Los desarrollos en serie de Taylor alrededor de la solución por elementos finitos  $\mathbf{u}_h$ , considerando sólo los términos lineales correspondientes a  $\tilde{\mathbf{u}}$ , son respectivamente:

$$[JU'(J)] u_h + \tilde{u} = [JU'(J)] |_{u_h} + J |_{u_h} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (25)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}_h) + \mathbf{c}_h^{\text{dev}} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \quad (26)$$

donde las derivadas direccionales correspondientes son:

$$DJ u_h | \cdot \tilde{\mathbf{u}} = J(\mathbf{u}_h) \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (25a)$$

$$Ds(\mathbf{u}_h) \cdot \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{c}_h^{\text{dev}} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \quad (26a)$$

La expresión (25), correspondiente a la componente volumétrica de la función de energía considerada (1), resulta:

$$\log J = \log J_h + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (27)$$

en tanto que la componente desviadora se puede expresar como:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_h + \tilde{\mathbf{s}} \quad (28)$$

Reemplazando las expresiones linealizadas en (22), (23) y (24) se obtiene:

$$(T_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}_h, \nabla^s \cdot \mathbf{w}_h) + (\tilde{\mathbf{s}}, \nabla^s \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,o} \quad (29)$$

$$(\log J_h - \frac{1}{\kappa} T_h, q_h) + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (30)$$

$$(T_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) + (\mathbf{s}_h, \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) + (\tilde{\mathbf{s}}, \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) = l(\tilde{\mathbf{w}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{V}_o \quad (31)$$

Si se integra por partes en cada elemento, considerando el efecto de las sub-escalas sólo en el interior de cada elemento y que las tracciones exactas son continuas entre elementos, la ecuación (31) se puede expresar como:

$$\sum_{e=1}^{n_{elm}} (\tilde{\mathbf{s}}, \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} (J_h \nabla (J_h^{-1} T_h) + J_h \nabla \cdot (J_h^{-1} \mathbf{s}_h) + \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{V}_o \quad (32)$$

Obsérvese que la ecuación (32) relaciona  $\tilde{\mathbf{s}}$ , y por lo tanto  $\mathbf{u}$ , con el residuo de la ecuación de balance de momentum correspondiente a la aproximación por elementos finitos, expresado en el término del lado derecho. Teniendo en cuenta que para elementos triangulares y tetraédricos lineales  $J_h$  es constante en  $\Omega_e$ , esta ecuación equivale en cada elemento a:

$$(\tilde{\mathbf{s}}, \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} = (\nabla T_h + \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{V}_o \quad (33)$$

Para obtener una expresión aproximada de  $\tilde{\mathbf{u}}$  es conveniente considerar la siguiente ecuación constitutiva aproximada:

$$\tilde{\mathbf{s}} := \mathbf{c}_h^{dev} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} \approx 2\tilde{\mu} \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}] \quad (34)$$

donde  $\tilde{\mu}$  es el módulo de cizallamiento efectivo en fase de carga plástica, definido en<sup>18</sup> como

$$\tilde{\mu} := \mu J_h^{-2/3} \frac{\|\text{dev} [\bar{\mathbf{b}}_h^e]\|}{\|\text{dev} [\bar{\mathbf{b}}_h]\|} \quad (35)$$

Mediante este coeficiente se considera el efecto del flujo plástico en la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras isocóricas totales, y se aplica para establecer la aproximación (34). En fases de descarga o de carga elástica este módulo es simplemente  $\tilde{\mu} := \mu J_h^{-2/3}$ .

Además, es necesario considerar en (33) la siguiente aproximación en cada elemento

$$(\tilde{\mathbf{s}}, \nabla^s \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} := (\boldsymbol{\tau}_e^{-1} \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}) |_{\Omega_e} \quad \forall \tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{V}_o \quad (36)$$

siendo una función de  $\tau_e$ , parámetro de estabilización que se define de modo que (36) se cumpla, al menos en forma aproximada

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{s}}\| \|\nabla^s \tilde{\mathbf{w}}\| &\cong \frac{\|\tilde{\mathbf{s}}\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|}{c_1 h_e} \cong \frac{\|2\tilde{\mu} \text{dev}[\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|}{c_1 h_e} \cong \frac{2\tilde{\mu}}{c_1 h_e} \left( \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\tilde{\mathbf{w}}\|}{c_2 h_e} \right) = \\ &= \frac{2\tilde{\mu}}{c^2 h_e} \|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\tilde{\mathbf{w}}\| = \frac{1}{\tau_e} \|\tilde{\mathbf{u}}\| \|\tilde{\mathbf{w}}\| \end{aligned} \quad (36a)$$

donde se ha empleado la ecuación constitutiva (34). De esta manera, el parámetro  $\tau_e$  queda definido como

$$\tau_e = \frac{c h_e^2}{2\tilde{\mu}} \quad (37)$$

en función de la longitud característica del elemento  $h_e$ , el módulo  $\tilde{\mu}$  y una constante  $c$  a determinar experimentalmente.

Queda por definir cómo aproximar la sub-escala  $\tilde{\mathbf{u}}$  a partir de (33), para considerar sus efectos en las ecuaciones (29) y (30), asociadas al espacio de elementos finitos.

### Sub-escalas ortogonales

En el marco general del método de las sub-escalas caben diversas alternativas para aproximar las sub-escalas, incluso la definición de funciones específicas. R. Codina<sup>13</sup> propuso como espacio natural para la búsqueda de las sub-escalas el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos; es decir, se adopta  $\tilde{W} \approx W_h^\perp$ . Esta definición da origen a una formulación ingeniosa y precisa, denominada *método de las sub-escalas ortogonales*. De acuerdo con este planteamiento, considerando la aproximación introducida en (36) y la definición del parámetro  $\tau_e$  (37), se obtiene

$$\tilde{\mathbf{u}} \cong \tau_e P_h^\perp (\nabla T_h + \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \mathbf{f}) \quad (38)$$

donde  $P_h^\perp(\cdot) = (\cdot) - P_h(\cdot)$  es la proyección ortogonal sobre el espacio  $W_h^\perp$ .

Si en (38) se considera que las fuerzas másicas se aproximan mediante elementos del espacio de elementos finitos, y por lo tanto  $P_h^\perp(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$ , y se desprecia el efecto de la divergencia de la componente desviadora de las tensiones, se obtiene

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e P_h^\perp (\nabla T_h) \quad (39)$$

Si en las ecuaciones (29) y (30) se integran por partes los términos asociados a la sub-escala  $\tilde{\mathbf{u}}$ , con la finalidad de reducir el orden de derivación, y se consideran sólo los efectos en el interior de cada elemento, se obtiene

$$(T_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}_h, \nabla^s \mathbf{w}_h) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} (\tilde{\mathbf{u}}, J_h \nabla \cdot (J_h^{-1} 2\tilde{\mu} \operatorname{dev} [\nabla^s \mathbf{w}_h])) |_{\Omega_e} = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0} \quad (40)$$

$$\left( \log J_h - \frac{1}{\kappa} T_h, q_h \right) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} (\tilde{\mathbf{u}}, J_h \nabla (J_h^{-1} q_h)) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (41)$$

Si se introduce en estas expresiones la aproximación (39), se tiene en cuenta que  $J_h$  es constante en  $\Omega_e$  y se desprecia el efecto del último término del lado izquierdo de (40), se obtiene

$$(T_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}_h, \nabla^s \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0} \quad (42)$$

$$\left( \log J_h - \frac{1}{\kappa} T_h, q_h \right) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \left( \tau_e P_h^\perp (\nabla T_h), \nabla q_h \right) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (43)$$

La proyección ortogonal del gradiente de presión se puede escribir como:  $P_h^\perp(\nabla T_h) = \nabla T_h - \Pi_h$  si se introduce como variable independiente adicional  $\Pi_h = P_h(\nabla T_h)$ , la proyección del gradiente de presión de Kirchhoff sobre el espacio de elementos finitos  $W_h$ . Esta variable  $\Pi_h \in T_h = \mathbf{H}^1$ , se calcula como

$$(\nabla T_h, \boldsymbol{\eta}_h) |_{\Omega_e} - (\Pi_h, \boldsymbol{\eta}_h) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in T_h \quad (44)$$

Finalmente, introduciendo esta definición, la formulación estabilizada del problema se puede escribir como: hallar  $(\mathbf{u}_h, T_h, \Pi_h) \in V_h \times Q_h \times T_h$  tal que

$$(T_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}_h, \nabla^s \mathbf{w}_h) = l(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0} \quad (45)$$

$$\left( \log J_h - \frac{1}{\kappa} T_h, q_h \right) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} (\tau_e (\nabla T_h - \Pi_h), \nabla q_h) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (46)$$



$$\sum_{e=1}^{nelm} (\nabla T_h - \Pi_h, \boldsymbol{\eta}_h) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in T_h \quad (47)$$

Obsérvese que en esta formulación se introduce sólo un término de estabilización adicional en la ecuación (46), el segundo del lado izquierdo. Por otro lado, se ha introducido una variable adicional en el problema,  $\Pi_h$ ; sin embargo, desde el punto de vista computacional esta desventaja se puede minimizar mediante una implementación robusta y eficiente, como se describirá en la siguiente sección.

## ASPECTOS DE IMPLEMENTACIÓN

La inclusión de una variable adicional hace poco práctica la solución monolítica del sistema. Obsérvese que no es posible condensar la variable  $\Pi$  en cada elemento, puesto que ésta es una variable continua. Para la solución del sistema de ecuaciones (45), (46), y (47) se propone un procedimiento escalonado, en el cual en el paso de tiempo  $n + 1$  se hallan  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  y  $T_h^{n+1}$  que satisfagan simultáneamente las ecuaciones (45) y (46), mientras se mantiene fijo el valor de  $\Pi_h^n$ , correspondiente al valor convergido del paso anterior

$$(T_h^{n+1}, \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (\mathbf{s}_h^{n+1}, \nabla^s \mathbf{w}_h) = l^{n+1}(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0} \quad (48)$$

$$\left( \log J_h^{n+1} - \frac{1}{\kappa} T_h^{n+1}, q_h \right) - \sum_{e=1}^{nelm} (\boldsymbol{\tau}_e^n (\nabla^n T_h^{n+1} - \Pi_h^n), \nabla^n q_h) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (49)$$

Nótese que en el término de estabilización se han considerado los gradientes espaciales  $\nabla^n$  con respecto a la configuración espacial correspondiente al paso anterior convergido; asimismo, el parámetro  $\tau_e^n$  se evalúa en el paso convergido anterior  $n$ . La solución de este sistema se obtiene utilizando, por ejemplo, el algoritmo incremental-iterativo de Newton-Raphson. Gracias a estas consideraciones, el sistema de ecuaciones asociado a la linealización de estas ecuaciones resulta simétrico para el modelo constitutivo propuesto.

Una vez resuelto el sistema se evalúa la proyección  $\Pi_h^{n+1}$  como

$$\sum_{e=1}^{nelm} (\nabla T_h^{n+1} - \Pi_h^{n+1}, \boldsymbol{\eta}_h) |_{\Omega_e} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in T_h \quad (50)$$

Esta ecuación se transforma en un sistema trivial si se emplea como aproximación la matriz de masa aglutinada. Esta estrategia propuesta ha mostrado ser efectiva, sin perder precisión ni robustez.

## SIMULACIONES

La eficacia de la formulación propuesta se muestra en problemas de incompresibilidad, tanto en deformación plana como en 3D; los elementos triangular y tetraédrico propuestos, denominados *T1P1*, se comparan con los correspondientes elementos estándar, denominados *P1*, y con los elementos de la formulación *Q1P0*. En los ejemplos se considera la condición de incompresibilidad, tanto en comportamiento elástico como en comportamiento elasto-plástico simulado mediante un modelo constitutivo J2. Con la finalidad de mostrar el comportamiento en situaciones extremas las mallas que se emplean son bastas. La formulación propuesta está incorporada en el programa de elementos finitos Coupled Mechanical and Thermal Analysis (COMET)<sup>20</sup>, desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

### Compresión 2D con modelo elástico en direcciones principales

Este es un ensayo de compresión en deformación plana. El espécimen es de dimensiones  $0,60 \times 0,20$  m. Se impone un desplazamiento de 0,08 m aplicado en la superficie superior, en el tercio central de 0,20 m. En la base se prescriben nulos los desplazamientos verticales y en la superficie superior se prescriben nulos los desplazamientos horizontales.

El modelo constitutivo utilizado es el modelo de elasticidad en direcciones principales propuesto en<sup>21</sup>. Los parámetros del material son el módulo de elasticidad  $E = 1,96 \times 10^5$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,4999$ , límite elástico  $\sigma_y = 150$  MPa.

En la Figura 1 se muestran las mallas deformadas de cuadriláteros  $Q1P0$ , de 341 nodos y 300 elementos, y de triángulos  $T1P1$ , de 357 nodos y 632 elementos, respectivamente en la Figura 1 a) y b). En la Figura 2 se muestran las distribuciones de presión. Se observa la similitud entre los resultados ofrecidos por el elemento  $Q1P0$  y el elemento propuesto  $T1P1$ , respectivamente en la Figura 2 a) y b). También se puede apreciar como el elemento  $T1P1$  propuesto capta mejor que el elemento  $Q1P0$  las zonas de concentración de tensiones. Por otro lado, en la malla deformada del elemento  $Q1P0$  se percibe una tendencia a desarrollar el efecto de *hourglassing* en la superficie superior.

### Bloque sometido a compresión 3D.

Un bloque de acero de dimensiones  $0,85 \times 0,85 \times 0,6$  m se comprime por su parte superior. Se impone un desplazamiento del 15% con respecto a su altura original. La Figura 3 muestra la vista exterior de la cuarta parte del dominio, discretizada con una malla de tetraedros, en las configuraciones de referencia y deformada, respectivamente. Las condiciones de contorno se han prescrito en las bases superior e inferior de manera que los movimientos en los planos horizontales están completamente restringidos. Las condiciones en las caras interiores se han prescrito en función de las condiciones de simetría.

Se considera un material elasto-plástico con régimen de elasticidad compresible, cuyo módulo de elasticidad es  $E = 1,9 \times 10^5$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,33$ , límite elástico  $\sigma_y = 150$  MPa y endurecimiento con saturación exponencial cuyos parámetros son: tensión límite de saturación  $\sigma_\infty = 180$  MPa y exponente 0,7.

Se debe observar que la condición prescrita en las bases, movimientos horizontales nulos en cada una, es sumamente restrictiva, particularmente para elementos tetraédricos en situación cuasi-incompresible, pues en este caso todos los elementos que tienen una de sus caras en las bases tienen un sólo nodo con posibilidad de movimiento, y éste está restringido a tomar posiciones que preserven el volumen.

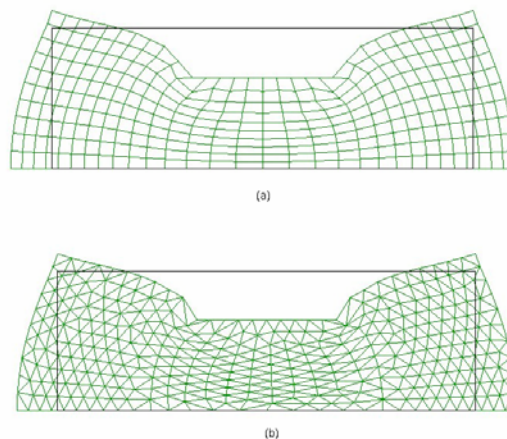
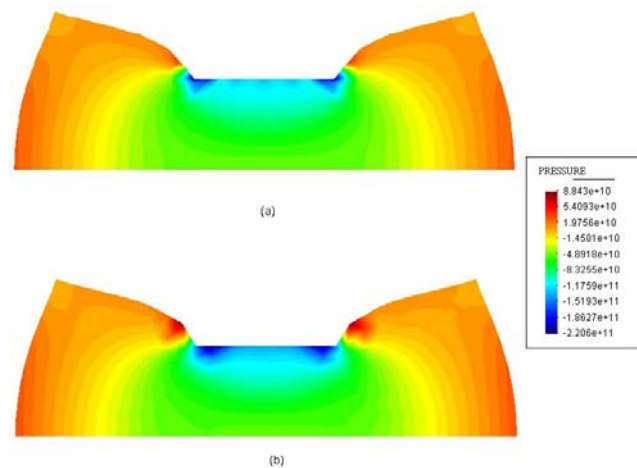
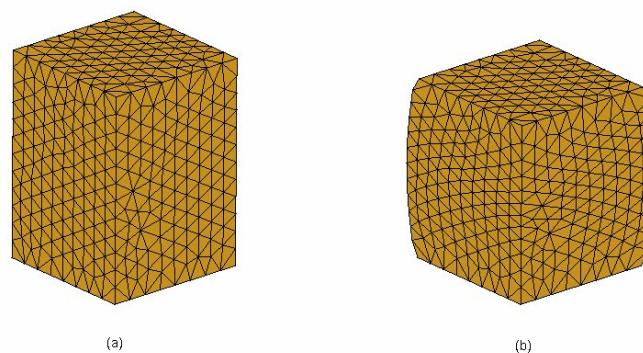


Figura 1. Ensayo de compresión no homogénea. Mallas deformadas



**Figura 2.** Ensayo de compresión no homogénea. Distribución de presión

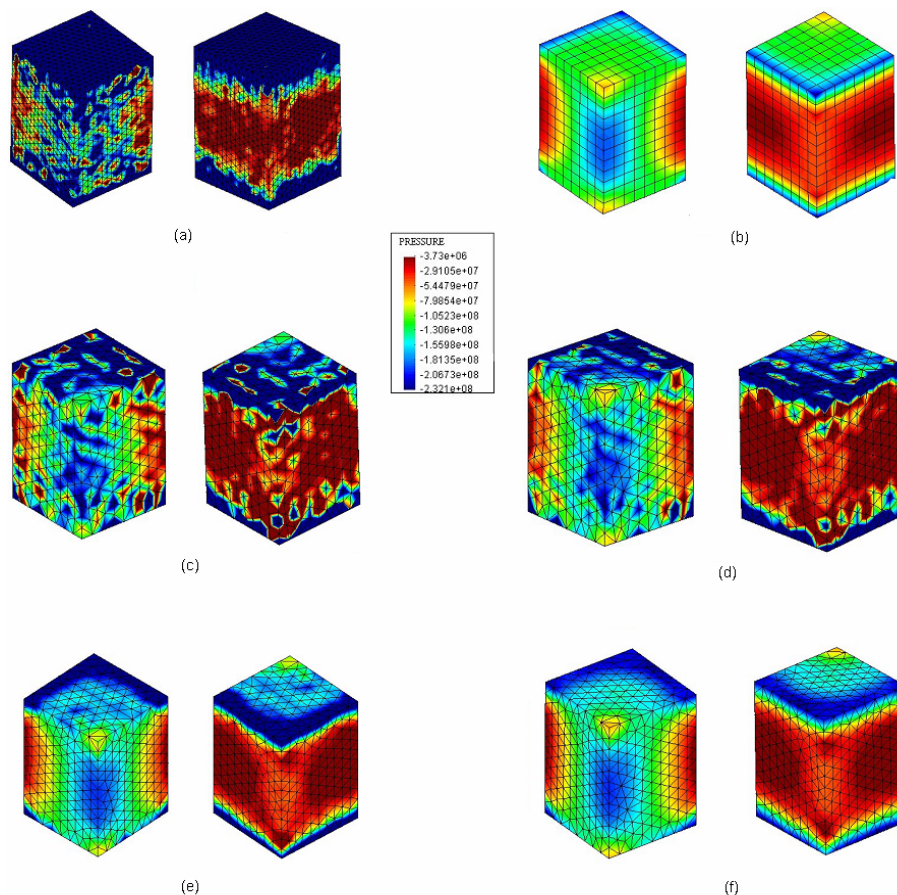


**Figura 3.** Bloque sometido a compresión 3D. Mallas a) de referencia y b) deformada

En la Figura 4 se muestran, sobre la cuarta parte del dominio, las distribuciones de la presión para las mallas de elementos triangulares estándar  $P1$  y de cuadriláteros  $Q1P0$ , Figuras 4 a) y b), respectivamente, y de cuatro mallas de elementos  $T1P1$  de la formulación propuesta, que difieren entre sí en el parámetro de estabilización adoptado. Por un lado, las Figuras 4 c) y d) presentan resultados obtenidos con elementos  $T1P1$ , pero sin tener en cuenta el efecto del flujo plástico en el parámetro de estabilización; por otro, las Figuras 4 e) y f) muestran los resultados considerando este efecto mediante la aproximación al módulo de cizallamiento propuesta en este trabajo, ecuación (35). En estas simulaciones se han tomado dos valores diferentes del coeficiente  $\mathbf{c}$  de la ecuación (37) con la finalidad de evaluar la sensibilidad del elemento propuesto con respecto al parámetro de estabilización.

Se puede apreciar en la Figura 4 a) que el elemento estándar  $P1$  no ofrece un buen resultado en este caso, pues si bien el material es compresible en rango elástico, el desarrollo de grandes deformaciones plásticas origina el bloqueo de este elemento. El elemento tridimensional de la formulación  $Q1P0$  ofrece un resultado libre de bloqueo en esta situación (Figura 4b). En la Figura 4 c) se muestra el resultado que ofrece el elemento tetraédrico  $T1P1$  con  $c = 1$ , y como se puede apreciar presenta un comportamiento físicamente inadmisibles: se

advierte la inestabilidad de la presión en el patrón de distribución, con presencia de altas y bajas presiones en zonas muy próximas, asociadas a grandes gradientes de deformación. Esto ocurre de manera similar, aunque menos severa, con el valor de  $c = 10$ , como se aprecia en la Figura 4 d). Claramente, el empobrecimiento del efecto estabilizador no es atribuible a una elección incorrecta del valor del coeficiente  $c$  del parámetro de estabilización, si se acepta como razonable una incertidumbre con respecto al valor de la constante  $c$  de un orden de magnitud. El efecto estabilizador mostrado en estos casos no es el correcto debido a que no se ha considerado el efecto de disminución del módulo de cizallamiento en régimen plástico. Esta reducción puede alcanzar varios órdenes de magnitud, por lo que es necesario definir el parámetro de estabilización en función del desarrollo del flujo plástico, tal como se propone en el presente trabajo, mediante las ecuaciones (35) y (37). En las Figuras 4 e) y f) se muestran las distribuciones obtenidas utilizando la aproximación propuesta para estimar el efecto del desarrollo del flujo plástico en el módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización. Estas distribuciones presentan un comportamiento estabilizado de la presión, y son similares a la correspondiente al elemento *Q1P0*; en particular, la distribución obtenida para  $c = 10$  Figura 4 e), aunque el resultado que ofrece el elemento *T1P1* con  $c = 1$  capta mejor las zonas de concentración de tensiones Figura 4 f). La comparación con las Figuras 4 c) y d) revela la importancia de considerar el efecto del módulo de cizallamiento en el régimen plástico al estimar el parámetro de estabilización.



**Figura 4.** Bloque sometido a compresión 3D. Distribución de presión obtenida con diversos elementos

Para la solución del sistema de ecuaciones se utilizó un algoritmo directo. En los problemas en 3D presentados, en los que se han empleado mallas de 1050 nodos, el tiempo total de CPU es del orden del 40% mayor para el elemento *T1P1* que para el *Q1P0*. El mayor tiempo de CPU empleado por el elemento *T1P1* corresponde al mayor número de grados de libertad por nodo que tiene en comparación con el elemento *Q1P0*.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se propone una formulación mixta, en desplazamientos y presión, adecuada para abordar problemas de incompresibilidad y aplicaciones generales, tanto en elasticidad como en plasticidad en grandes deformaciones. Ésta se desarrolla en el marco del método de estabilización de las sub-escalas, en particular en el método de las sub-escalas ortogonales (*OSGS*). En comparación con la formulación de deformaciones mejoradas (*EAS*) esta formulación ofrece la ventaja de ser aplicable a elementos mixtos triangulares y tetraédricos, de interés práctico por su versatilidad en la generación de mallas. En comparación con elementos de otras formulaciones estabilizadas estos elementos son más precisos, robustos y exhiben menor sensibilidad al parámetro de estabilización. Se demuestra que el parámetro de estabilización calculado con el módulo de cizallamiento correspondiente a régimen elástico no es aplicable a régimen plástico. La aproximación propuesta al parámetro de estabilización en función del módulo de cizallamiento efectivo ha mostrado ser eficaz; éste es un aporte original de esta formulación y es aplicable a otras formulaciones estabilizadas, como las basadas en el método GLS.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer a los profesores R. Codina y E. Oñate los interesantes comentarios que han contribuido a enriquecer este trabajo.

## REFERENCIAS

- 1 O.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “*The finite element method*”, Vol. **I**, McGraw Hill, (1989).
- 2 J.C. Simo, R.L Taylor y K.S. Pister, “Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **51**, pp. 177-208, (1985).
- 3 J.C. Simo y M.S. Rifai, “A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes”, *Internat. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **29**, pp. 1595-1638, (1990).
- 4 F. Brezzi y M. Fortin, “*Mixed and Hybrid Finite Element Methods*”, Springer, New York, (1991).
- 5 B.D. Reddy y J.C. Simo, “Stability and convergence of a class of enhanced assumed strain methods”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. **32**, pp. 1705-1728, (1995).
- 6 O.C. Zienkiewicz, J. Rojek, R.L. Taylor y M. Pastor, “Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids”, *Internat. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. **43**, pp. 565-583, (1998).
- 7 R.L. Taylor, “A mixed formulation for triangular and tetrahedral elements”, Abascal, R., Domínguez, J. and Bugeda, G. (Eds.), *Conference Proceedings on Métodos Numéricos en Ingeniería, SEMNI*, Barcelona, Spain, (1999).
- 8 O. Klaas, A. Maniatty y M.S. Shephard, “A stabilized mixed finite element method for finite elasticity. Formulation for linear displacement and pressure interpolation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. **180**, pp. 65-79, (1999).
- 9 E. Oñate, J. Rojek, R.L. Taylor y O.C. Zienkiewicz, “Linear triangles and tetrahedra for incompressible problem using a finite calculus formulation”, *Proceedings of European Conference on Computational Mechanics, ECCM*, (2001).

- 10 T.J.R. Hughes, "Multiscale phenomena: Green's function, Dirichlet-to Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. **127**, pp. 387-401, (1995).
- 11 T.J.R. Hughes, G.R. Feijoó, L. Mazzei y J.B. Quincy, "The variational multiscale method-a paradigm for computational mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **166**, pp. 3-28, (1998).
- 12 R. Codina y J.A. Blasco, "Finite element method for the Stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **143**, pp. 373-391, (1997).
- 13 R. Codina, "Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **190**, pp. 1579-1599, (2000).
- 14 R. Codina, "Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **191**, pp. 4295-4321, (2002).
- 15 M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar y M. Cervera, "A stabilized formulation for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **191**, pp. 5253-5264, (2002).
- 16 M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar y M. Cervera, "A stabilized formulation for incompressible plasticity using linear triangles and tetrahedra", *International Journal of Plasticity*, Vol. **20**, pp. 1487-1504, (2004).
- 17 M. Cervera, Chiumenti, Q. Valverde y C. Agelet de Saracibar, "Mixed Linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **192**, pp. 5189-5208, (2003).
- 18 Q. Valverde, "Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos", <http://www.tdx.cesca.es/TDCat-1118102-101538>, Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), (2002).
- 19 J.C. Simo y T.J.R. Hughes, "*Computational Inelasticity*", Springer-Verlag, New York, (1998).
- 20 M. Cervera, C. Agelet de Saracibar y M. Chiumenti, "COMET: Coupled Mechanical and Thermal analysis. Data Input Manual, Version 5.0", Technical report IT-308, <http://www.cimne.upc.es>, (2002).
- 21 J.C. Simo, "Quasi-incompressible elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; Vol. **85**, pp.273-310, (1991).