

# EVALUACIÓN DE LA PRESIÓN DE FALLO DEL EDIFICIO DE CONTENCIÓN DE UNA CENTRAL NUCLEAR TIPO PWR-W TRES LAZOS. PARTE I: METODOLOGÍA

MIGUEL CERVERA\*  
ALEX H. BARBAT\*  
ALEX HANGANU\*  
EUGENIO OÑATE\*  
y  
CRUZ CIRAUQUI\*\*

*\*E. T. S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña.*

*\*\* Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.  
Gran Capitán s/n, Edificio C1, 08034 Barcelona.*

## RESUMEN

Se presenta en este artículo la metodología seguida para la evaluación de la presión de fallo del edificio de contención de una central nuclear PWR-W tres lazos. El análisis debe ser totalmente tridimensional para permitir la consideración de los elementos estructurales más significativos, tener en cuenta el comportamiento no lineal de los materiales y estudiar la sensibilidad de los resultados ante ciertas incertidumbres asociadas a algunos parámetros. El modelo computacional incluye las ecuaciones constitutivas para el hormigón y las armaduras de acero, la discretización espacial (elementos isoparamétricos con armado) y la resolución del problema estructural no lineal mediante algoritmos incrementales-iterativos con aceleradores de convergencia. Se describen los modelos estructurales utilizados y los análisis llevados a cabo para su calibración.

## SUMMARY

In this paper, the methodology followed for the evaluation of the failure pressure of a large dry containment building of a PWR-W three loops nuclear power plant is presented. The analysis must be fully 3D in order to take into account the most significant structural elements, as well as the nonlinear behaviour of the materials and the sensitivity of the results to certain uncertainties associated to some parameters. The computational model includes the constitutive equations for the concrete and the reinforcing steel, the spatial discretization (isoparametric elements with reinforcement) and the solution of the non-linear structural problem via incremental-iterative algorithms with convergence accelerators. The structural models used and the analyses performed for their calibration are also described.

Recibido: Enero 1995

## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas el campo del hormigón (armado y pretensado) como material de construcción se ha visto extendido enormemente, llegando a incluir tipologías estructurales que antes se reservaban a otros materiales, así como nuevas tipologías especialmente concebidas. Hoy se construyen en hormigón estructuras de contención de centrales nucleares, plataformas petrolíferas *off-shore*, puentes de gran luz, etc. La relevancia social de estas construcciones, medida tanto en base a la peligrosidad potencial que su fallo representa como al volumen de inversión que requieren, ha representado un salto cualitativo en el nivel de exigencia de su 'control de calidad'. No es de extrañar, por tanto, que las estructuras de la industria nuclear o la petrolífera tengan hoy especificaciones comparables con las de la industria aeroespacial, por ejemplo.

Los ingenieros estructurales han sido siempre conscientes de las dificultades intrínsecas que plantean las estructuras de hormigón. Desde que en 1967 se presentó el primer modelo de elementos finitos para una viga de hormigón armado, se han desarrollado multitud de modelos computacionales para sistemas bi- y tridimensionales, vigas, placas y láminas de hormigón. Progresivamente, más y más fenómenos del complejo comportamiento mecánico del hormigón se han ido introduciendo en los modelos, y éstos se han ido alejando de las idealizaciones e hipótesis simplificativas propias de los modelos clásicos de cálculo de estructuras. Una vertiente indeseable de este desarrollo ha sido el alejamiento entre la ingeniería de investigación y desarrollo y la de proyecto y ejecución. Sin embargo, el desarrollo acelerado y en paralelo que la mecánica computacional y los ordenadores digitales han experimentado en estos mismos años hacen que hoy sea posible abordar con fiabilidad la *evaluación de la seguridad* de las estructuras de hormigón, especialmente de aquellas sobre las que se centra el interés de la sociedad. Las centrales nucleares están claramente dentro de esta categoría.

Como es sabido, el riesgo potencial de las centrales nucleares estriba en la emisión de materiales radioactivos al ambiente. En consecuencia, el concepto de seguridad en estas instalaciones se basa en crear una serie de barreras independientes que impidan la liberación de los productos de fisión (lo que se conoce como "*defensa en profundidad*"), siendo el edificio de contención la última de dichas barreras. En caso de accidente, las consecuencias últimas de éste dependen en gran medida de la capacidad de la contención de mantener su integridad.<sup>2-4</sup> El presente trabajo se centra en la evaluación de la respuesta de la central ante un accidente y su objetivo básico consiste en estudiar el comportamiento estructural del edificio de contención frente a las presiones y temperaturas internas que se desarrollan en diversos escenarios de accidente supuestos, así como determinar los valores de dichas acciones que dan lugar al agotamiento estructural o a la pérdida de funcionalidad por falta de estanqueidad del edificio.

La organización del artículo es la siguiente: se describe primero la estructura objeto del estudio, la metodología de análisis seguida, así como los elementos que definen el modelo computacional. Se describe luego el modelo estructural utilizado y se presentan a continuación resultados de la calibración del mismo por comparación con los resultados medidos en las pruebas de integridad estructural de la contención (análisis

lineal). Todos aquellos aspectos referentes a la simulación numérica del proceso de fallo de la estructura, así como los estudios paralelos que se realizaron para la concreción de la metodología propuesta se presentan en la segunda parte de este trabajo.<sup>1</sup>

## DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

El edificio de contención alberga el núcleo del reactor y su sistema de refrigeración y constituye la última barrera para impedir el escape de productos de fisión al exterior. Por consiguiente, se diseña para mantener dentro de límites aceptables la tasa de fugas en las condiciones de presión y temperatura provocadas por el accidente base de diseño. El edificio de contención está formado por una losa de cimentación sobre la que se sustenta una pared cilíndrica vertical, cerrada en su parte superior mediante una cúpula hemisférica. La estructura es de hormigón armado y tiene también un sistema de postesado de la pared cilíndrica y de la cúpula realizado mediante tendones no adherentes. Toda la superficie interior del edificio está recubierta por una chapa de revestimiento (*"liner"*) que tiene funciones de estanqueidad. En la Figura 1 pueden verse una sección vertical y otra horizontal del edificio de contención, con sus principales características geométricas. Las principales dimensiones de la estructura son: diámetro interior 40 m, altura interior total 63.4 m, altura interior a línea tangencial con la cúpula 43.4 m, espesor losa cimentación 3 m, espesor de la pared cilíndrica 1.15 m, espesor de la cúpula en línea tangencial 1.15 m, espesor de la cúpula en clave 0.95 m, espesor de la chapa de revestimiento 6.5 mm.

La cimentación del edificio de contención es una losa de hormigón armado de forma básicamente circular de 22.4 m de radio y 3 m de espesor. En su parte central se encuentra la cavidad del reactor. En la parte inferior de la losa se encuentra una galería perimetral utilizada para el tesado de los tendones verticales de postesado.

La pared cilíndrica tiene 20 m de radio interior, 43.20 m de altura y 1.15 m de espesor. Dicha pared es más gruesa sólo en la zona en torno a la compuerta de equipos para permitir el paso de los tendones de postesado desviados por dicha penetración. A lo largo de la pared se encuentran tres contrafuertes, situados cada  $120^\circ$ , que sirven para el anclaje de los tendones horizontales del sistema de postesado. Las penetraciones de la pared cilíndrica de mayor relevancia en el comportamiento estructural del edificio de contención son las siguientes: compuerta de personal, compuerta de equipos, compuerta de emergencia, la penetración de vapor principal, la penetración de purga del edificio y la penetración de transferencia de combustible.

La cúpula hemisférica tiene un radio interior de 20 m y su espesor varía desde 1.15 m en su arranque hasta 0.95 m en su coronación, donde se encuentra una plataforma de hormigón armado que no tiene misión estructural. Los tres contrafuertes de tesado se prolongan en toda la cúpula, hasta encontrarse con la plataforma superior; sin embargo, se utilizan para anclar tendones sólo en la zona de la cúpula que se halla entre la línea de tangencia con la pared y un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal. A partir de dicho ángulo, los contrafuertes tienen únicamente misión estética.

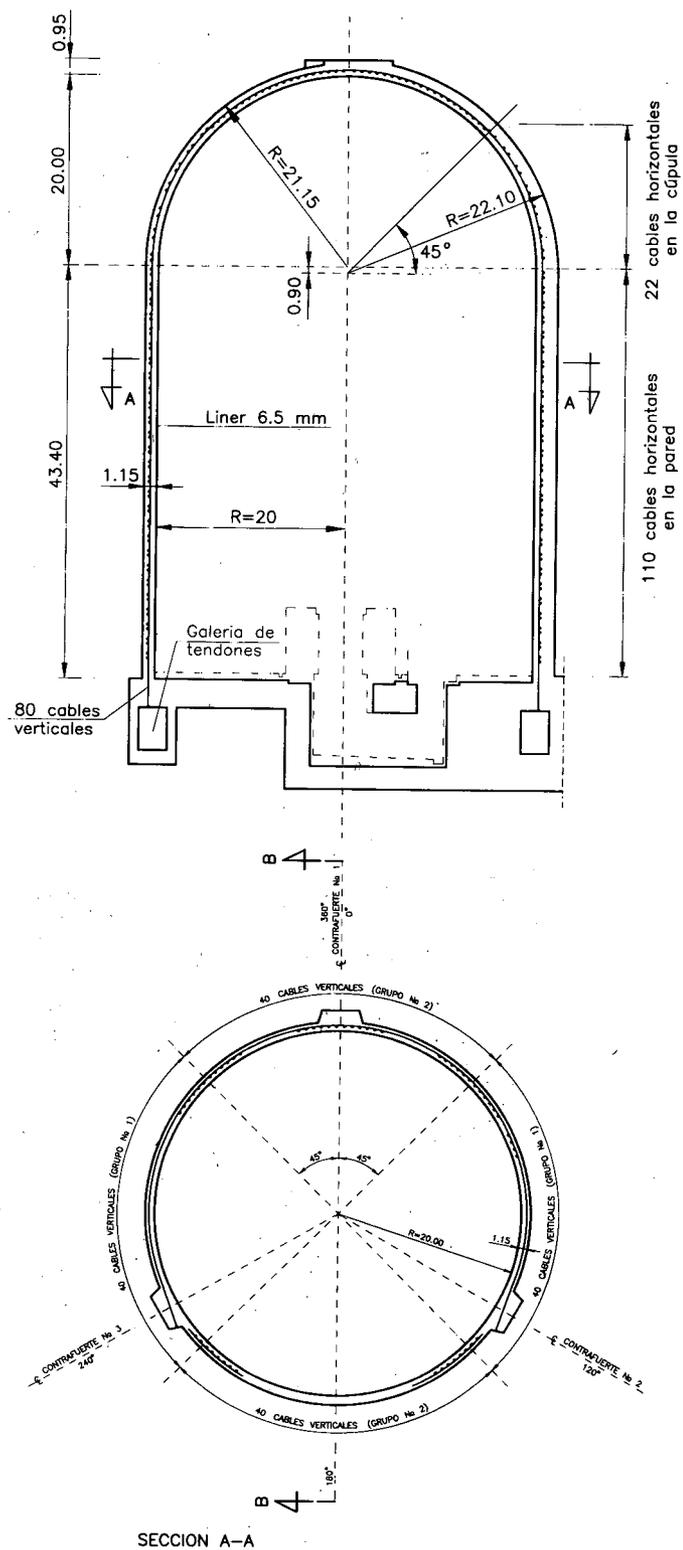


Figura 1. Edificio de contención – secciones vertical y horizontal

Además de la armadura pasiva, existe un sistema de postesado, realizado mediante tendones de tipo no adherente, que genera acciones que contrarrestan las tracciones producidas en las paredes y cúpula por la presión interna. El postesado es doble –horizontal y vertical– tal como puede verse en la Figura 1. La pared cilíndrica y los primeros  $45^\circ$  de la cúpula están postesados por medio de 132 tendones horizontales que abarcan  $240^\circ$ , anclándose en los tres contrafuertes. Los 80 tendones verticales tienen forma de *U* invertida, anclándose sus extremos en la galería de tendones. En la cúpula estos tendones forman dos familias que se cruzan ortogonalmente.

El paramento interior de la contención va revestido por una chapa de acero con un espesor de 6.5 mm que, junto con las penetraciones, esclusas de personal, emergencia y equipos, constituyen una barrera de estanqueidad. Su objeto es mantener las fugas del edificio a menos del 0.1 % del volumen libre interior al día, en las condiciones de presión posteriores a un accidente base de diseño. En las zonas en las que el revestimiento debe soportar cargas locales, es sustituido por otro, de mayor espesor.

## METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

El objetivo principal de este trabajo es el desarrollo, validación y aplicación (parte II) de una metodología de análisis para la evaluación de la presión de fallo del edificio de contención de una central nuclear tipo PWR-W tres lazos en caso de un accidente *más severo que la base de diseño*. A tal efecto se realiza el análisis no lineal de la estructura sometida a la acción simultánea de presión interna creciente y aumento de la temperatura interior. Se obtiene de esta forma la respuesta estructural completa para toda la secuencia de carga hasta llegar a la situación de fallo. Se define la presión de fallo (y, por tanto, el fallo estructural) como aquella para la que se alcanza el agotamiento de los materiales, es decir, un determinado límite de deformación en la armadura pasiva, en los cables de postesado o en la chapa de revestimiento interior de la estructura.

Existen diferentes procedimientos para evaluar la presión de fallo de un edificio de contención. Uno de ellos, utilizado en muchos estudios, consiste en realizar cálculos simplificados de diferentes localizaciones del edificio, evaluar la presión de fallo de cada una de ellas y asignar como presión de fallo del edificio la de la localización con presión de fallo más baja. Otra posible forma de determinación consiste en efectuar un cálculo axisimétrico del edificio mediante un modelo de elementos finitos de revolución y extraer del mismo las condiciones de contorno para una serie de análisis más detallados de localizaciones especiales. Sin embargo, el método elegido en este trabajo está basado en la definición de un modelo tridimensional de elementos finitos que reproduzca las características más significativas del edificio. La razón para utilizar un modelo de este tipo como contraposición a uno axisimétrico radica principalmente en la existencia de detalles estructurales que rompen la aparente simetría de revolución; éstos son:

- los tres contrafuertes de anclaje del sistema de cables de postesado;
- la falta de simetría de revolución de las fuerzas generadas sobre la estructura por el sistema de postesado;

- las penetraciones existentes, algunas de ellas de gran tamaño, y su irregular disposición;
- la existencia, en torno a las zonas de penetraciones, de cantidades significativas de armadura adicional.

Estos detalles constructivos tienen una influencia decisiva en los modos de deformación de la estructura, así como en los cambios de forma y en los movimientos de las penetraciones y sólo pueden ser detectados y estudiados por medio de un modelo tridimensional.

La metodología seguida para la evaluación de la presión de fallo de la estructura de contención descrita en la sección anterior se puede esquematizar en los siguientes puntos:

- Definir los elementos básicos del modelo computacional necesarios para simular el comportamiento estructural en las fases previas y hasta alcanzar la condición de fallo.
- Construir a partir de éstos un modelo estructural discreto que represente adecuadamente la estructura real.
- Calibrar el modelo estructural mediante la simulación numérica de las pruebas de integridad de la contención (análisis elástico).
- Simular un escenario de accidente en el que la presión interior aumenta progresivamente hasta alcanzar la condición de fallo (análisis no lineal).
- Estudiar la sensibilidad de los resultados frente a dos circunstancias relevantes: las condiciones de cimentación y el efecto de la temperatura en la definición del escenario de accidente (análisis no lineal).
- Estudiar la sensibilidad de los resultados frente a las incertidumbres de las propiedades de los materiales (análisis probabilístico + análisis no lineal).

Los condicionantes y detalles correspondientes a cada uno de los puntos anteriores se precisan en las secciones siguientes y en la segunda parte de este artículo. Las conclusiones alcanzadas, especialmente respecto a la sensibilidad de los resultados frente a ciertos parámetros, pueden ser muy útiles a la hora de plantear futuros análisis para estructuras similares.

## ELEMENTOS DEL MODELO COMPUTACIONAL

El modelo computacional utilizado en este trabajo se basa en diversos desarrollos teóricos y computacionales especialmente elaborados para el análisis no lineal de estructuras laminares de hormigón armado utilizando modelos tridimensionales de elementos finitos.<sup>5-7</sup> Todos ellos han sido incluidos en el programa de cálculo por ordenador de desarrollo propio denominado *STAR3*, que ha sido debidamente adaptado a los condicionantes de este estudio. Un análisis realizado mediante el mencionado programa proporciona no sólo la presión de fallo (carga última) de la contención, sino también el estado de tensiones y deformaciones en todos los componentes estructurales y una descripción del estado de fisuración del hormigón y de fluencia del acero de las armaduras activas y pasivas, así como sobre su agotamiento. Se llega a disponer, de esta forma, de una completa información acerca de la evolución

de la pérdida de capacidad resistente que se produce en la estructura a lo largo de todo el proceso de carga, hasta llegar al colapso; es decir, de una buena descripción del mecanismo de fallo de la contención.

Se describen a continuación las características más relevantes de los diversos elementos del modelo computacional, es decir, los modelos constitutivos para el hormigón y el acero, el modelo de elementos finitos y el procedimiento de análisis no lineal.

### Modelo constitutivo del hormigón

Existen en la literatura multitud de modelos constitutivos para el hormigón, con muy distintos grados de complejidad y rangos de aplicabilidad, lo que hace que la selección de uno de ellos para un tipo de análisis determinado dependa de gran número de factores propios del análisis (nivel de tensiones alcanzadas a tracción y compresión, reversibilidad o ciclicidad de la carga, velocidad de aplicación de ésta, posibilidad de localización de las deformaciones, etc.). El modelo seleccionado para este trabajo es un modelo elasto-plástico con endurecimiento en compresión combinado con un modelo de fisuración distribuida con ablandamiento en tracción. Este tipo de relación constitutiva ha sido muy utilizado en estudios teóricos y aplicaciones prácticas referidas a estructuras laminares de hormigón armado,<sup>5-7</sup> lo que avala su fiabilidad. No obstante, existen posibilidades alternativas, entre las que mencionaremos los modelos de *daño continuo*, que han despertado considerable interés en los últimos años. Señalaremos que algunos de los estudios previos a la realización de este trabajo se llevaron a cabo con modelos axisimétricos de esta familia<sup>8</sup>, y que los resultados demuestran que son una alternativa en la que debe profundizarse.

#### *Comportamiento en compresión*

La evidencia experimental muestra que la relación tensión-deformación para el hormigón es no lineal incluso para bajos niveles de tensión. La deformación inelástica se puede separar en sus componentes recuperable e irre recuperable. En este modelo se utiliza la teoría de la elasticidad para la parte de deformación recuperable y la teoría de la plasticidad con endurecimiento por deformación para la parte no recuperable. Deben establecerse cuatro condiciones para evaluar el estado de tensión correspondiente a un estado de deformación dado: (a) la condición de fluencia, (b) la regla de flujo, (c) la regla de endurecimiento, y (d) la condición de aplastamiento.

*La condición de fluencia.* La mayoría de las situaciones prácticas de estados triaxiales de tensión se pueden describir mediante una función de fluencia dependiente de la tensión normal media,  $I_1$ , y del segundo invariante de tensiones desviadoras,  $J_2$ . El criterio de fluencia adoptado aquí es de esta forma, y se puede escribir

$$f(I_1, J_2) = [\alpha I_1 + \beta(3J_2)]^{1/2} = \sigma_0 \quad (1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos parámetros del material, y  $\sigma_0$  es la tensión efectiva equivalente.

Si se ajusta el criterio de acuerdo con los resultados experimentales de Kupfer para estados de tensión biaxiales (cercaos a los propios de placas y láminas) se tiene:

$$\alpha = 0.355 \sigma_0 \quad \beta = 1.355 \quad (2)$$

En la Figura 2 se compara el criterio de fluencia resultante con los resultados experimentales de Kupfer.

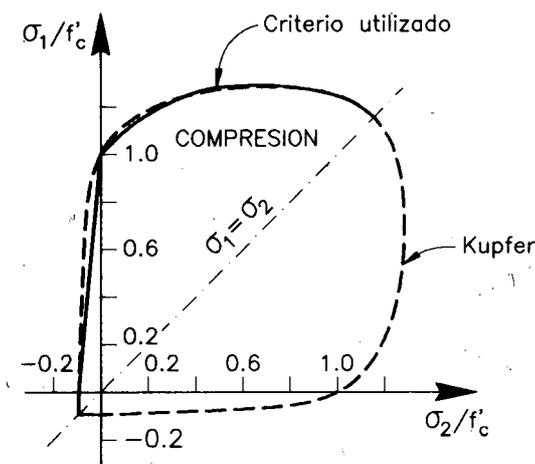


Figura 2. Criterio de fluencia a compresión y fisuración a tracción para el hormigón - espacio biaxial de tensiones

Este criterio de fluencia puede usarse como base de un modelo elasto-plástico perfecto si  $\sigma_0$  se toma igual a la resistencia última a compresión,  $f'_c$ , obtenida de un test uniaxial. Sin embargo, es más realista usar un modelo con endurecimiento por deformación, en el que  $\sigma_0$  es función del parámetro de endurecimiento. Un valor  $\sigma_0 = c f'_c$  (con un valor típico para  $c \approx 0.3$ ) define entonces una superficie que limita el comportamiento elástico. La deformación inelástica comienza cuando se alcanza esta superficie, y la regla de endurecimiento controla la expansión de la superficie de fluencia bajo la acción de las cargas posteriores. De esta forma se define toda una familia de "superficies de carga", tal como muestra la Figura 3.

*La regla de flujo.* En la teoría de la plasticidad<sup>9</sup> se debe definir la regla de flujo para poder evaluar los incrementos de deformación plástica correspondiente a un incremento dado de tensión durante la deformación inelástica. En este modelo utilizaremos una regla de flujo asociada, lo que significa que el vector de variación de la deformación plástica es normal a la superficie de fluencia, y se puede escribir de la forma

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

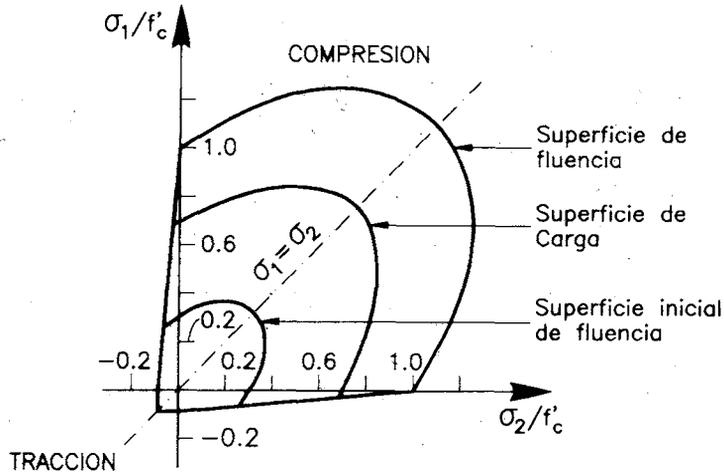


Figura 3. Representación en el espacio de tensiones bidimensional del modelo constitutivo del hormigón

donde  $d\lambda$  es un multiplicador plástico y  $\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}$  es un vector normal a la superficie de carga actual. La función de fluencia (1) se puede reescribir como

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \hat{\alpha} I_1 + [(\hat{\alpha}^2 I_1^2 + \beta(3J_2))]^{1/2} = \sigma_0 \tag{4}$$

con  $\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{2\sigma_0}$  (y, por tanto, adimensional). A partir de esta expresión se puede calcular el vector  $\mathbf{a} = \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}}$ . El multiplicador plástico se puede calcular como<sup>9</sup>

$$d\lambda = (H' + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a} \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon} \tag{5}$$

donde  $H'$  es el parámetro de endurecimiento,  $\mathbf{D}$  es la matriz constitutiva elástica, y  $d\boldsymbol{\epsilon}$  es el vector de incremento total de la deformación.

La relación incremental completa tensión-deformación en elasto-plasticidad viene dada por la relación<sup>9</sup>

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\epsilon} \tag{6}$$

con

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - (\mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{D}) (H' + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a})^{-1} \tag{7}$$

*La regla de endurecimiento.* Ésta es necesaria para definir el cambio de posición de las “superficies de carga” durante la deformación plástica. Se usan los conceptos de deformación plástica efectiva y de tensión efectiva para permitir la extrapolación de los resultados de los tests uniaxiales a situaciones multiaxiales de tensión. En este trabajo se toma la “Parábola de Madrid” como relación entre deformación y tensión efectiva:

$$\sigma_0 = E_0 \epsilon \left(1 - \frac{\epsilon}{2\epsilon_0}\right) \tag{8}$$

donde  $\sigma_0$  es la tensión efectiva,  $E_0$  es el módulo de rigidez inicial,  $\epsilon$  es la deformación total, y  $\epsilon_0$  es la deformación total correspondiente a la tensión pico  $f'_c$ . A partir de esta relación se puede obtener la relación deseada con la deformación plástica haciendo  $\epsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} + \epsilon_p$  para llegar a

$$\sigma_0 = -E_0\epsilon_p + (2E_0^2\epsilon_0\epsilon_p)^{1/2}, \quad cf'_c < \sigma_0 < f'_c \quad (9)$$

y a partir de ésta obtener el parámetro de endurecimiento como:

$$H' = \frac{d\sigma_0}{d\epsilon_p} = E_0 \left[ \left( \frac{\epsilon_0}{2\epsilon_p} \right)^{1/2} - 1 \right] \quad (10)$$

Como puede verse en la Figura 4, se obtiene un excelente ajuste a los resultados experimentales de Kupfer tomando  $c = 0.3$  y  $\epsilon_0 = 2f'_c/E_0$ .

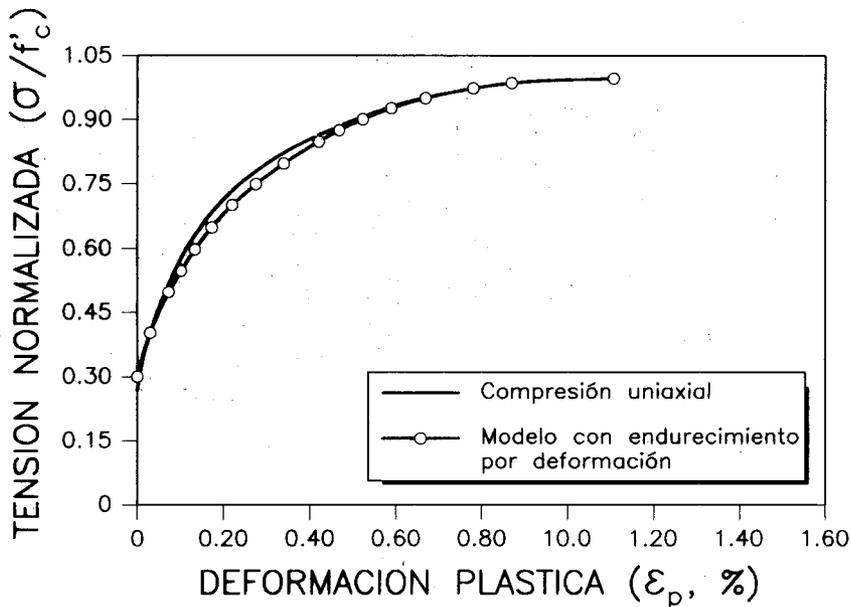


Figura 4. Comparación entre la regla de endurecimiento y las deformaciones inelásticas de compresión uniaxial de Kupfer

*La condición de aplastamiento.* La deformación inelástica en compresión continua según el modelo elasto-plástico anterior hasta que se produce aplastamiento. El colapso por aplastamiento es un fenómeno controlado por la deformación, y para considerarlo se debe definir una superficie de fallo en el espacio de deformaciones. Una forma simple de hacer esto es convertir el criterio de fluencia (en tensiones) en un criterio análogo de deformaciones. Así, se toma

$$f(\epsilon) = \alpha' I_1' + [(\alpha'^2 I_1'^2 + \beta'(3J_2'))^{1/2}] = \epsilon_u \quad (11)$$

donde  $\hat{\alpha}'$  y  $\beta'$  son dos parámetros del material,  $I_1'$  y  $J_2'$  son invariantes de deformación y  $\epsilon_u$  es un valor de deformación total última que se puede tomar de los test uniaxiales (típicamente,  $\epsilon_u \approx 0.0035 \text{ mm/mm}$ ). Cuando las deformaciones alcanzan la superficie de aplastamiento se supone que el hormigón pierde toda su capacidad de transmitir tensiones y su rigidez.

### *Comportamiento en tracción*

La principal característica del comportamiento material del hormigón es su baja resistencia a tracción, lo que resulta en fisuración bajo tracción para tensiones muy bajas comparadas con las tensiones de fallo a compresión. En consecuencia, la fisuración es la mayor causa de no linealidad en las estructuras de hormigón armado. En este trabajo se ha adoptado un modelo de fisura distribuida, y por tanto, la fisuración es tenida en cuenta modificando las propiedades del material en función de la evolución del estado de deformaciones, pero no la topología estructural. El modelo de fisuración queda definido mediante: (a) el criterio de fisuración, (b) la regla de ablandamiento post-fisuración, y (c) el comportamiento a compresión del hormigón fisurado.

*Criterio de fisuración.* Se adopta como criterio de fisuración el criterio de la máxima tensión principal de tracción. Para el hormigón en un punto previamente no fisurado, se calculan las tensiones principales y sus direcciones. Si la máxima tensión principal sobrepasa un cierto valor límite, se forma una fisura en un plano ortogonal a dicha tensión. A partir de entonces el comportamiento del hormigón deja de ser isótropo para ser ortótropo, con ejes materiales coincidiendo con las direcciones principales de tensión. Se permite la formación de un máximo de dos fisuras ortogonales en cada punto.

El valor límite para la iniciación de la fisuración se define de la forma siguiente:

- (i) en la zona de tracción triaxial,

$$\sigma_{io} = f'_t \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

como corresponde a la evidencia experimental.

- (ii) en las zonas de tracción-tracción-compresión y tracción-compresión-compresión se toman ecuaciones de resistencia a la tracción linealmente decrecientes con la compresión en las direcciones transversales, de la forma:

$$\sigma_{io} = f'_t \left(1 + \frac{\sigma_{i+1}}{f'_c}\right) \quad \sigma_{i+1} < 0 \quad (13.a)$$

$$\sigma_{io} = f'_t \left(1 + \frac{\sigma_{i+1}}{f'_c}\right) \left(1 + \frac{\sigma_{i+2}}{f'_c}\right) \quad \sigma_{i+1}, \sigma_{i+2} < 0 \quad (13.b)$$

ya que la existencia de compresión en las otras direcciones principales reduce la resistencia a tracción. Las superficies de fisuración resultantes se representan en la Figura 5.

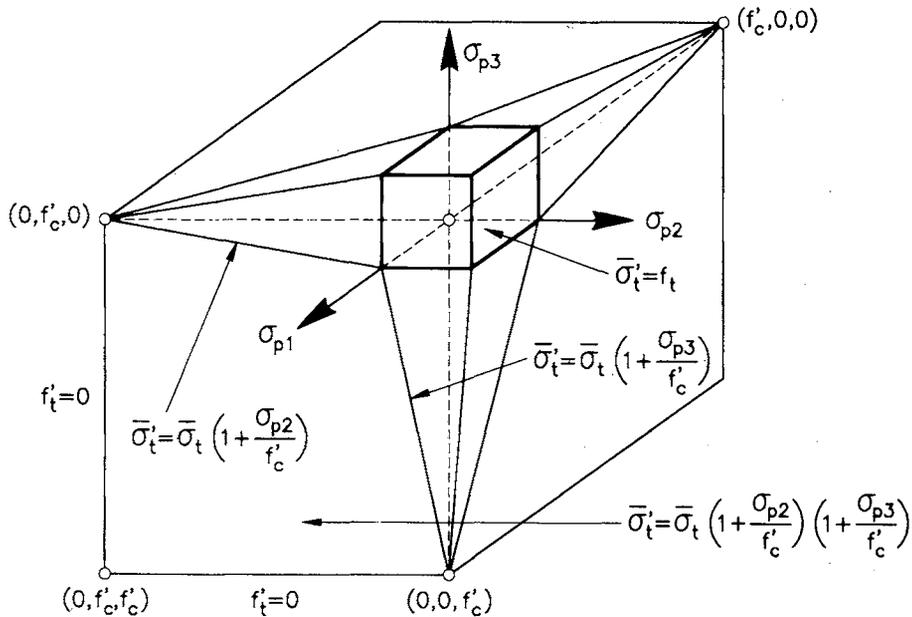


Figura 5. Superficies de fisuración para el modelo de hormigón. Representación en el espacio triaxial de tensiones

*Regla de ablandamiento post-fisuración.* El comportamiento post-fisuración del hormigón se basa en la evidencia experimental que muestra que después de fisurarse el hormigón todavía es capaz de jugar un papel activo en la rigidización de un elemento, aunque esta influencia se hace progresivamente más débil. Esta evidencia justifica la introducción del concepto de ablandamiento por deformación, ilustrado en la Figura 6. La tensión normal a la fisura no se reduce a cero inmediatamente cuando se forma la fisura, sino que se reduce gradualmente a medida que aumenta la deformación de tracción normal a la fisura.

Suponiendo una función de tipo exponencial para describir el efecto de ablandamiento por tracción se tiene

$$\sigma = f'_t e^{-(\epsilon - \epsilon_t)/\gamma} \tag{14}$$

donde  $f'_t$  es la resistencia a tracción del hormigón,  $\epsilon$  es la deformación total de tracción normal a la fisura,  $\epsilon_t$  es la deformación en el momento de la fisuración, y  $\gamma$  es el parámetro de ablandamiento. El parámetro  $\gamma$  se calcula como:

$$\gamma = \frac{G_f}{l_c f'_t} \tag{15}$$

donde  $G_f$  es la energía de fractura del hormigón por unidad de superficie (una propiedad del material, típicamente  $G_f = 50 - 300 \text{ J/m}^2$ ) y  $l_c$  es la longitud característica del volumen de hormigón fisurado. En este trabajo se toma

$$l_c = (dV)^{1/3} \tag{16}$$

donde  $dV$  es el volumen de hormigón asociado al punto de integración en el que se produce la fisura.

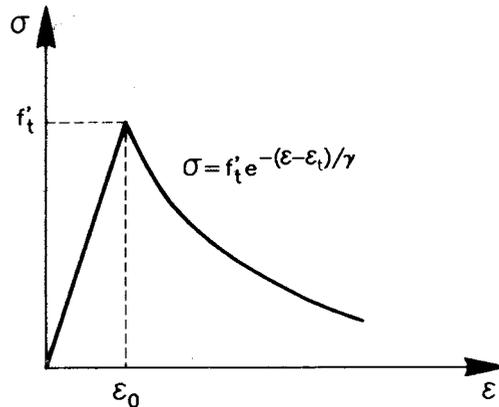


Figura 6. Curva de ablandamiento por deformación bajo tracción

Una vez fisurado, se considera al hormigón ortótropo, con los ejes materiales orientados en la dirección de las direcciones principales de tensión en el momento de la fisuración. La matriz  $\mathbf{D}$  se construye en dichos ejes materiales y luego se transforma a los ejes globales. En los puntos fisurados el coeficiente de Poisson se toma como nulo, con lo que la matriz  $\mathbf{D}$  se vuelve diagonal. Los módulos de elasticidad longitudinal en las direcciones perpendiculares a las fisuras se toman como módulos secantes según la regla de ablandamiento (14):

$$E_{si} = \frac{\sigma_i(\text{actual})}{\epsilon_i(\text{actual})} \leq E_0 \quad (17)$$

Durante el proceso de carga una fisura previamente abierta puede comenzar a cerrarse, y eventualmente cerrarse completamente o reabrirse. El modelo presente permite el cierre y reapertura de las fisuras siguiendo una trayectoria secante (descarga por el origen). Una vez que la fisura está totalmente cerrada se supone que recupera la rigidez inicial en la dirección normal a la fisura (regradación de rigidez), de acuerdo con las observaciones experimentales.

La capacidad del hormigón de transmitir tensiones tangenciales también se ve grandemente reducida después de la fisuración. Sin embargo, cabe tener en cuenta el hecho de que las superficies de las fisuras no son lisas y, en el caso del hormigón armado, el efecto de "cosido" de las barras de acero. Esto se consigue fácilmente introduciendo un módulo de rigidez a cortante reducido para el hormigón fisurado. La forma más sencilla de definir el módulo de cizalladura reducido es haciendo

$$G = \beta_s G_0 \quad (18)$$

donde  $G_0$  es el módulo inicial del hormigón y  $\beta_s$  es el llamado factor de retención de cortante; éste factor puede ser tomado como constante, con valores típicos  $\beta_s = 0.1-0.5$ .

Se puede introducir un modelo más realista si se adopta una ley de transmisión de tensiones tangenciales en los planos de fisuración que siga una curva de ablandamiento en función de la deformación de apertura de la fisura análoga a la de la tensión normal. Para esto basta con definir

$$\beta_s = 1 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{su}} \right)^k \quad (19)$$

donde  $\epsilon$  es la deformación normal a la fisura,  $\epsilon_{su}$  es una deformación normal última (alrededor de  $0.005 \text{ mm/mm}$ ) y  $k$  es un parámetro en el rango 0.3–1.0. Esta expresión permite calcular también los correspondientes módulos de elasticidad transversal secantes.

*Comportamiento a compresión del hormigón fisurado.* En este modelo la fisuración del hormigón se considera como un fallo parcial del material, que no afecta ni a la rigidez ni a las componentes de tensión que no actúan sobre el plano de la fisura. Por tanto, en las direcciones paralelas a ésta puede aparecer fisuración secundaria si existen tensiones de tracción suficientemente elevadas; por otro lado, si las tensiones son de compresión, el hormigón se comporta según el modelo elasto-plástico, pudiendo llegar a producirse aplastamiento.

Para tener en cuenta todas estas posibles contingencias, los pasos que se dan para cada punto de evaluación de las tensiones son los siguientes:

- (a) se evalúan las deformaciones totales, los correspondientes incrementos elásticos de tensión y las tensiones totales;
- (b) se comprueba la aparición o existencia previa de fisuración primaria o secundaria en función del estado de deformaciones y tensiones y se actualiza el estado de tensiones en consecuencia;
- (c) se comprueba la existencia de comportamiento plástico y se actualiza el estado de variables internas y tensiones en consecuencia;
- (d) se comprueba la ocurrencia de aplastamiento; si éste ocurre, se anulan todas las componentes de tensión que soporta el hormigón.

### Modelo constitutivo del acero

En este trabajo se supone que tanto el acero de las barras de armadura pasiva como el de los tendones de los cables de postesado tiene propiedades uniaxiales en la dirección de las barras o de los tendones. La chapa de revestimiento interior de la estructura se supone de propiedades biaxiales isótropas.

Como ecuación constitutiva para el acero se adopta en todos los casos una formulación elasto-plástica con endurecimiento lineal después de la fluencia. Se supone que la descarga se produce de forma elástica. Se ha considerado también el agotamiento del acero por deformación cuando, después de plastificar, se alcanzan las deformaciones de rotura del material.

### Descripción del Modelo de Elementos Finitos

*El elemento sólido 3D.* En este trabajo se usa el elemento isoparamétrico hexaédrico serendípito de 20 nodos (tri-cuadrático). La derivación de la matriz de rigidez de este elemento se realiza en la forma habitual<sup>9</sup> y viene dada por la expresión

$$\mathbf{K}_c = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}_c \mathbf{B} dV \quad (20)$$

donde  $\mathbf{B}$  es la matriz deformación-desplazamiento,  $\mathbf{D}_c$  es la matriz constitutiva del material y la integral se extiende al volumen del elemento considerado. Normalmente, la integración de los elementos isoparamétricos hexaédricos de 20 nodos se realiza usando las reglas de Gauss-Legendre o de Lobatto con 3x3x3 puntos. La regla de Gauss es más precisa, mientras que la de Lobatto tiene puntos de integración sobre las caras de los elementos, donde se dan normalmente los picos de tensión. En este trabajo se usa una regla de integración distinta, que es a la vez precisa y eficiente. La regla, de sólo 15 puntos de integración, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{-1}^{+1} f(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 = Af(0, 0, 0) + \\ & + B[f(-b, 0, 0) + f(b, 0, 0) + \dots] + C[f(-c, -c, -c) + f(-c, -c, c) + \dots] \quad (21) \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\epsilon_3$  son las coordenadas naturales normalizadas, y los respectivos coeficientes de peso y posiciones son:  $A = 1.564444$ ,  $B = 0.3555556$ ,  $C = 0.5377778$ ,  $b = 1.000000$  y  $c = 0.6741000$ . Como se puede ver en la Figura 7 la distribución de puntos de integración en esta regla es tal que hay 6 puntos en los centros de las caras de los elementos.

*Idealización de la armadura pasiva.* Se supone adherencia perfecta entre las barras de acero de las armaduras pasivas y el hormigón circundante. Esta hipótesis de compatibilidad de desplazamientos y deformaciones entre el acero y el hormigón permite tratar la armadura como parte integrante del elemento sólido. Su matriz de rigidez,  $\mathbf{K}_s$ , se suma a la del hormigón,  $\mathbf{K}_c$ , para obtener la matriz de rigidez total del elemento, de la forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_s \quad (22)$$

Cada conjunto de barras de armadura se distribuye como una capa bidimensional de membrana de espesor equivalente, colocada en el interior del elemento de hormigón en una posición tal que una de las coordenadas isoparamétricas sea constante, como se muestra en la Figura 8. El ángulo que forman las barras con el eje  $x$  de un sistema cartesiano local tangente a la capa de acero en cada punto de integración se introduce como dato.

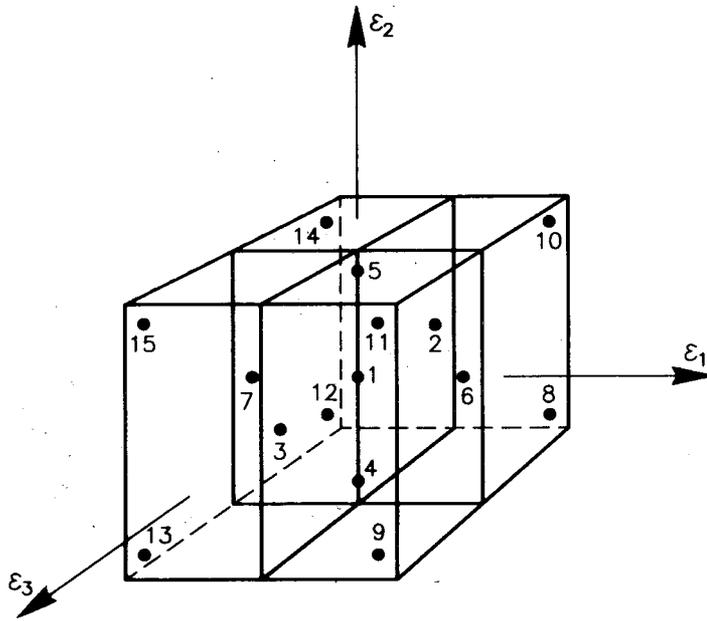


Figura 7. Distribución de los puntos de integración en el elemento sólido hexaédrico

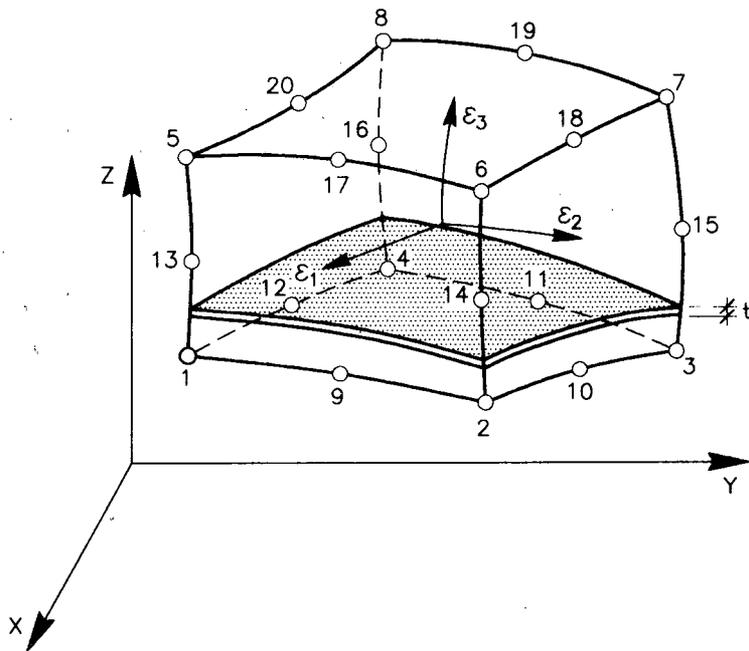


Figura 8. Elemento de hormigón con una capa de armadura

La contribución de la rigidez del acero se puede calcular de la forma

$$\mathbf{K}_s = \int \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{L}^T \mathbf{D}_s \mathbf{L} \mathbf{B} t d\Omega \quad (23)$$

donde  $\mathbf{D}_s$  es la matriz constitutiva del acero,  $\mathbf{L}$  es una matriz de transformación del sistema local de referencia al global, y  $t$  es el espesor equivalente de la capa de armadura.

*Idealización de la armadura activa.* Las armaduras activas presentes en una estructura del tipo estudiado aquí están normalmente constituidas por tendones de tipo no adherente, engrasados y enfilados en vainas de acero embebidas en el hormigón. Del conjunto de efectos que estas armaduras introducen a lo largo del proceso de carga cabe distinguir entre dos contribuciones: el efecto activo y el efecto pasivo.<sup>10</sup>

El *efecto activo* del sistema de fuerzas (o cargas equivalentes) que el postesado, al ser puestos en tensión y anclados los tendones, introduce sobre la estructura es, con gran diferencia, el más importante en la determinación de la carga última de ésta, pues equivale, aproximadamente, a una presión externa que compensa directamente la presión interna susceptible de aparecer durante una eventual presurización accidental del edificio. Estas fuerzas se deben a la curvatura de los cables, al rozamiento de éstos con las vainas y al anclaje de los extremos de los tendones en los paramentos de la estructura. El sistema de fuerzas equivalentes de pretensado puede considerarse constante una vez aplicado y, salvo algunos efectos secundarios derivados de las pérdidas instantáneas y diferidas, no depende del grado de adherencia entre acero y vaina.

Por otra parte, el *efecto pasivo*, o contribución resistente de las armaduras de postesado, viene dado por el incremento de fuerza que experimentan los tendones al deformarse ante acciones posteriores a su instalación. Particularmente, una presión interior producirá un alargamiento neto de todas las familias de tendones y, por tanto, un aumento de la fuerza de tesado, y un consiguiente incremento de la presión que los cables ejercen sobre la estructura. El efecto pasivo es distinto para tendones adherentes y no adherentes. Los primeros admiten claramente un tratamiento análogo al descrito para las armaduras pasivas. En los segundos, el incremento de tensión no es función del incremento de deformación local, sino del alargamiento neto del tendón, fruto de la deformación global de la estructura. Sin embargo, el límite de la contribución pasiva en ambos casos se alcanza cuando el acero de los tendones plastifica y alcanza su deformación de agotamiento.

El tratamiento final del efecto pasivo de las distintas familias de tendones no adherentes existentes en la estructura objeto de estudio se funda en un estudio determinista sobre la sensibilidad de la presión última del edificio con respecto a la variación de la cuantía de acero en cada una de las familias. Así, los tendones circunferenciales se han tratado como armadura adherente, pues la geometría y el modo de deformación de la estructura lo justifica. *A posteriori* se observa que dichos tendones están plastificados en toda su longitud cuando se alcanza la presión de fallo. Por otro lado, se comprueba que los tendones meridionales no tienen un efecto pasivo perceptible sobre la estructura, ya que su trazado es recto en las paredes verticales, por lo cual no han sido incluidos como armadura pasiva.

### Procedimiento de cálculo no lineal

Las ecuaciones de equilibrio para el análisis no lineal de estructuras de hormigón armado se pueden expresar como

$$\boldsymbol{\psi} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} = 0 \quad (24)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas externas aplicadas y  $\boldsymbol{\psi}$  es el vector de fuerzas residuales.

Para trazar la respuesta estructural completa bajo cargas crecientes es necesario utilizar un procedimiento de solución incremental de aplicación de la carga, combinado con un método iterativo para disipar las fuerzas residuales (típicamente, el método de Newton-Raphson). Normalmente estas técnicas incremental-iterativas son muy costosas, ya que se precisa mucho esfuerzo para formar y factorizar la matriz de rigidez tangente. En el método standard de Newton-Raphson esto se hace en cada iteración de cada incremento de carga. Se consigue un cierto ahorro utilizando los métodos de Newton-Raphson modificados, donde sólo se actualiza la matriz de rigidez una vez por incremento de carga (normalmente en la primera iteración). También se puede utilizar la matriz elástica inicial en todas las iteraciones del análisis (método de la tensión inicial).

Cuando se utilizan los métodos de Newton-Raphson modificado son necesarias más iteraciones para cada incremento de carga para conseguir la convergencia de la solución que con el método standard. Es por tanto muy conveniente utilizar técnicas de aceleración de la velocidad de convergencia. Uno de los procedimientos que para tal fin han sido utilizados con éxito en el análisis de estructuras de hormigón armado es el llamado "de búsqueda direccional"<sup>9,11</sup> (*line search*). En problemas con  $N$  grados de libertad, y conocida una aproximación  $\mathbf{d}_i$  a la solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{d}_i) \approx 0 \quad (25)$$

cualquier sistema iterativo de solución busca una mejor aproximación a la solución en una cierta dirección  $\delta \mathbf{d}_i$  del espacio  $N$ -dimensional. La nueva aproximación estará en la línea  $\mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{d}_i + \eta_i \delta \mathbf{d}_i$ . No es esperable encontrar la solución al problema en esta línea, pero se puede calcular el escalar  $\eta_i$  de tal forma que se anule la componente de las fuerzas residuales  $\boldsymbol{\psi}_{i+1}$  en la dirección de búsqueda. Esto puede escribirse como:

$$\delta \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\psi}_{i+1}[\mathbf{d}_{i+1}(\eta_i)] = 0 \quad (26)$$

Realizar una búsqueda exacta del parámetro  $\eta_i$  que satisface la ecuación anterior puede resultar muy costoso, ya que requeriría múltiples reevaluaciones de las fuerzas residuales. Como alternativa, se puede relajar el requisito de la Ec. (26), y calcular el escalar  $\eta_i$  de tal forma que la componente de las fuerzas residuales  $\boldsymbol{\psi}_{i+1}$  en la dirección de búsqueda se reduzca suficientemente. En este trabajo se ha adoptado el requisito de que

$$|\delta \mathbf{d}_i^T \boldsymbol{\psi}_{i+1}(\eta_{i,j})| < \epsilon \quad (27)$$

donde  $j$  es el número de prueba de búsqueda en línea y  $\epsilon$  es una tolerancia preseleccionada (típicamente  $\epsilon = 0.3 - 0.5$ ).

Cuando se usa un procedimiento incremental-iterativo para resolver un problema no lineal se debe establecer un criterio de convergencia para definir cuándo se puede parar el proceso iterativo y aplicar un nuevo incremento de carga. Los criterios más fiables son los de fuerzas residuales. En tales criterios se asegura la satisfacción de las ecuaciones de equilibrio comparando la norma del vector de fuerzas residuales con la norma de las fuerzas exteriores aplicadas o el vector de las reacciones calculadas. En este trabajo se ha utilizado un criterio de este tipo, expresado de la forma

$$\frac{\|\psi_i\|}{\max[\|\mathbf{r}_i\|, \|\mathbf{f}\|]} \leq \hat{\epsilon} \quad (28)$$

donde  $\psi_i$  son las fuerzas residuales en la iteración  $i$ -ésima,  $\mathbf{r}_i$  es el vector de reacciones,  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas exteriores y  $\hat{\epsilon}$  es una tolerancia preseleccionada (típicamente  $\hat{\epsilon} \approx 0.01 - 0.02$ ).

## MODELO ESTRUCTURAL

Los modelos estructurales de elementos finitos utilizados en este trabajo han sido dos: (a) modelo tridimensional con losa de cimentación y (b) modelo tridimensional sin losa. El modelo (a) se muestra en la Figura 9, mientras que el modelo (b) es idéntico, pero sin la losa de cimentación, y con la pared cilíndrica empotrada en su base. En dicha figura se observan claramente las características descritas de la estructura, así como los contrafuertes y las penetraciones. En la primera vista se observan la compuerta de equipos, la de emergencia y la de vapor principal. En la segunda se observa el macizo de la cavidad del reactor y las compuertas de personal, purga de contención y tubo de transferencia de combustible. Ha sido necesario definir un número de 120 "materiales" distintos para describir bien el complejo sistema de armado de la estructura, teniendo en cuenta que una variación en la cuantía de armadura requiere la definición de un nuevo "material".

El modelo (a) tiene 1127 elementos y 7200 nodos (21600 grados de libertad), mientras que el modelo (b) tiene 417 elementos y 3091 nodos (9273 grados de libertad). Resulta, pues, de interés determinar la influencia de incluir en el modelo la losa, debido al notable esfuerzo computacional asociado a su consideración.<sup>1</sup>

Las acciones consideradas en el análisis del edificio han sido las siguientes: peso propio de la estructura, presiones equivalentes generadas por el sistema de postesado y presión interior generada por eventos accidentales.

La distribución de presiones equivalentes al sistema de postesado sobre la pared cilíndrica y la cúpula semiesférica se ha calculado de forma analítica y punto a punto. Para ello se ha tenido en cuenta la influencia de los siguientes parámetros: coeficientes de rozamiento y de ondulación de los tendones, penetración de cuña de los anclajes, pérdidas elásticas instantáneas y diferidas de la fuerza de tesado y presencia de tramos rectos en el trazado. Se ha considerado también con precisión la localización exacta

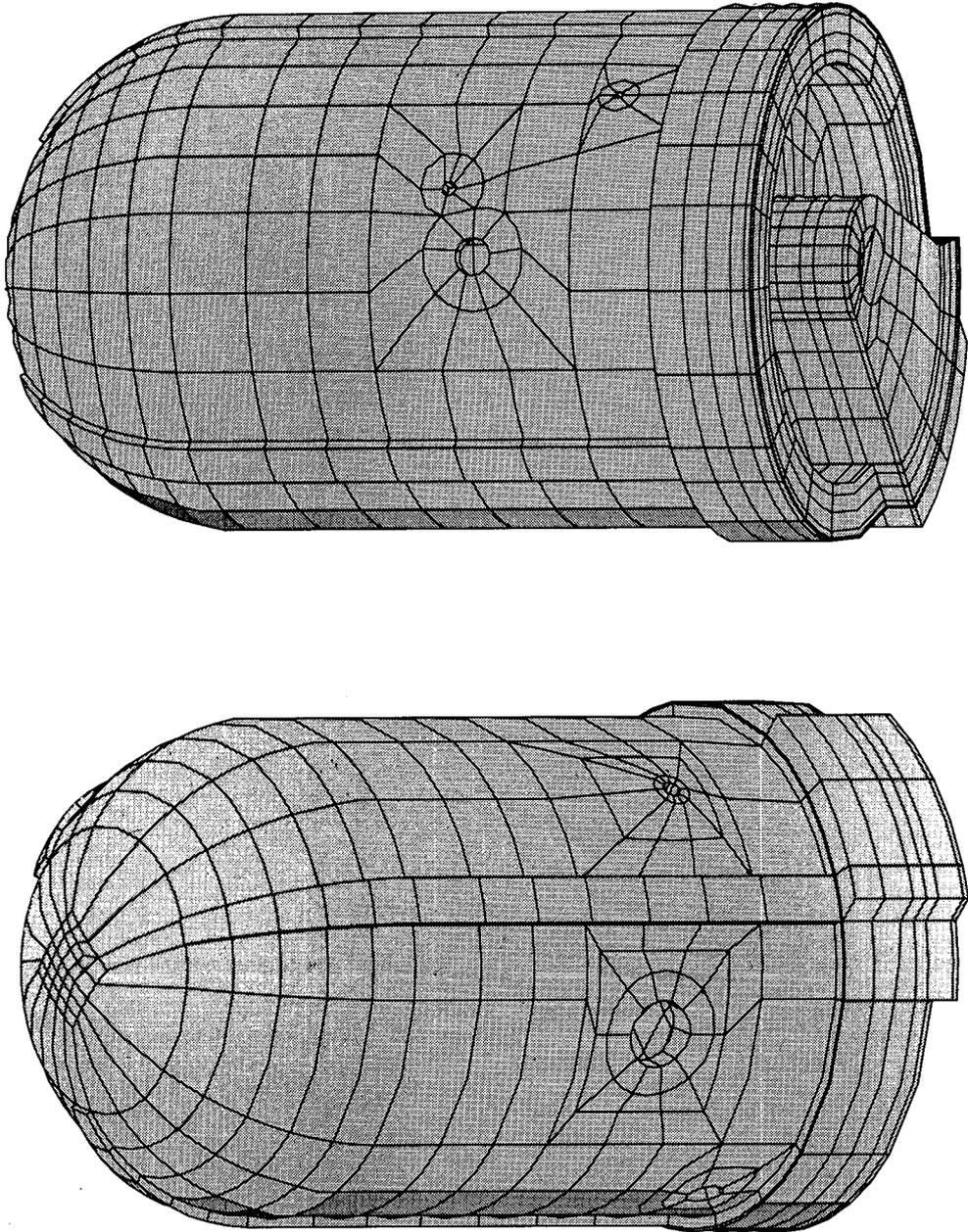


Figura 9. Modelo discreto del edificio de contención con losa de cimentación

de los tendones dentro de las paredes del edificio, así como el hecho de que la presión generada es siempre normal al trazado del cable y contenida en su plano. Se han eliminado así muchas de las habituales aproximaciones en el tratamiento del postesado. Debe tenerse en cuenta que cualquier error en la evaluación de las presiones de postesado se traduce directamente en un error equivalente en la evaluación de la presión de fallo de la estructura.

Así pues, la estructura sometida a su peso propio y al sistema de fuerzas de postesado conforma el estado inicial del modelo, antes de ser sometido a las cargas propias del escenario de accidente. A partir de éste se procede a la evaluación de la presión de fallo incrementando gradualmente la presión interior mas allá del accidente base de diseño y hasta alcanzar la carga última. En algunos casos se ha tenido también en cuenta el efecto del incremento de la temperatura interior según una secuencia predefinida por el escenario de accidente.

### CALIBRACIÓN DEL MODELO

El objeto de este análisis es comparar la respuesta del modelo estructural discreto con los datos disponibles de la prueba de integridad estructural del edificio de contención, realizada *in situ* en Febrero de 1987. Dicha comparación permite comprobar la adecuación del modelo discreto al comportamiento "real" de la estructura, así como calibrar las propiedades elásticas de los materiales utilizadas en el modelo computacional.

Durante esta prueba se aumenta la presión interior hasta 1.15 veces la presión de diseño, es decir  $4.37 \text{ kp/cm}^2$  rel., de acuerdo con una ley de evolución predeterminada. También se han incluido los efectos térmicos según los datos tomados durante la prueba *in situ*. Para la simulación de esta prueba se ha utilizado el modelo tridimensional sin losa, y con las fuerzas de postesado en sus valores correspondientes a 0 años.

En las Figuras 10 y 11 se muestra la comparación entre los resultados experimentales y la simulación numérica para los sensores H-5 (situado en la sección transversal 0-180°) y H-12 (sección transversal 90-270°), respectivamente. Las curvas representan la evolución desplazamiento-presión para cada uno de los sensores. Se observa una buena concordancia entre las pendientes de las curvas simuladas y las medidas experimentalmente, lo que indica que el modelo de elementos finitos reproduce adecuadamente la rigidez (y su distribución) de la estructura real. Además, puede comprobarse como el modelo reproduce el bucle provocado por la carga y descarga que ocurren durante la prueba.

La realización de esta simulación de prueba de carga ha servido para detectar la necesidad de incluir en el modelo estructural la armadura adicional existente en zonas con penetraciones no consideradas en la discretización. Su adición es necesaria para obtener una respuesta realista, dado que el debilitamiento provocado por dichas penetraciones está sobrecompensado por la existencia de armadura adicional.

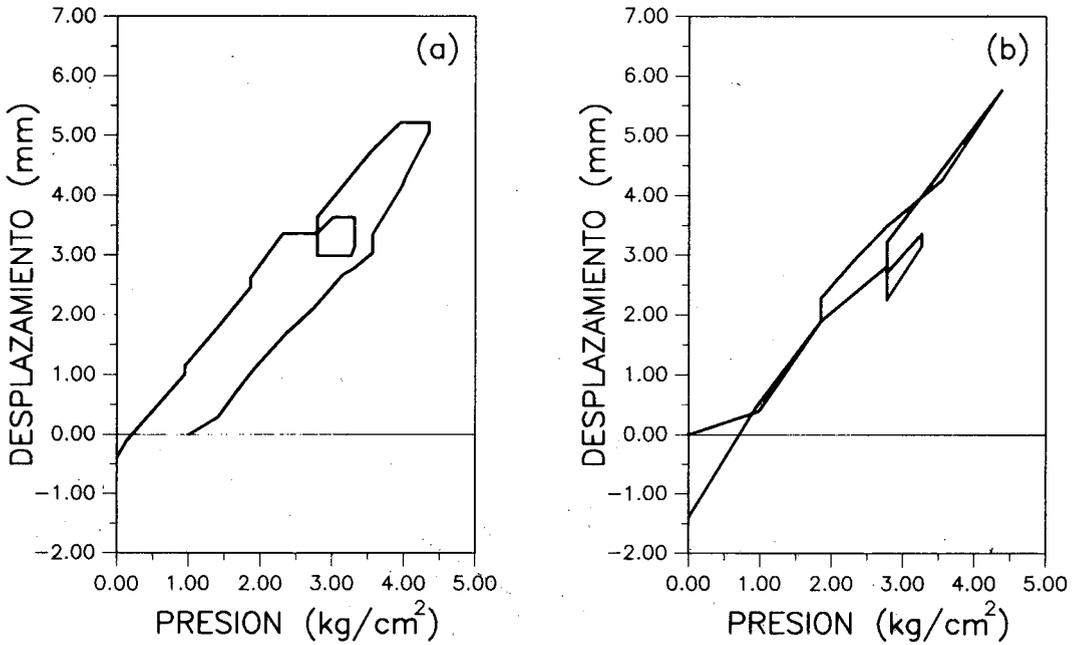


Figura 10. Resultado experimental (a) y de la simulación (b) de la prueba de integridad en el sensor H-5 (0-180°)

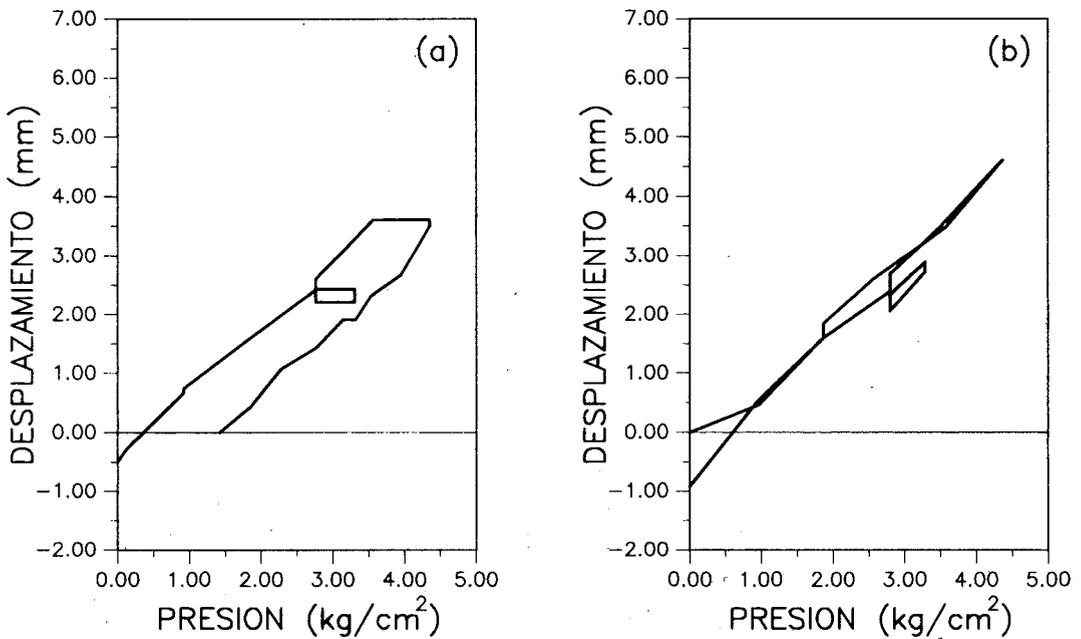


Figura 11. Resultado experimental (a) y de la simulación (b) de la prueba de integridad en el sensor H-12 (90-270°)

## CONCLUSIONES

Se presenta en este artículo un modelo computacional tridimensional de elementos finitos para la evaluación de la presión de fallo del edificio de contención de una central nuclear PWR-W tres lazos. El modelo incluye todos aquellos aspectos que deben contemplarse para llevar a cabo la simulación numérica de los correspondientes escenarios de accidente. Se describe con detalle la metodología propuesta, así como el modelo estructural utilizado en el estudio. Se presentan resultados de los análisis llevados a cabo para la validación y calibración del modelo, que permiten concluir su adecuación para este tipo de estudio. Todos aquellos aspectos referentes a la simulación numérica del proceso de fallo de la estructura, así como los estudios paralelos que se realizaron para la concreción de la metodología propuesta se presentan en la segunda parte de este trabajo.<sup>1</sup>

## REFERENCIAS

1. A.H. Barbat, M. Cervera, C. Cirauqui, A. Hanganu y E. Oñate, "Evaluación de la presión de fallo del edificio de contención de una central nuclear tipo PWR-W tres lazos. Parte II: simulación numérica", *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 11, No. 3 (en prensa), Barcelona.
2. T. Speis y F. Eltawila, "Containment severe accident phenomenology", *V Workshop on Containment Integrity*, Washington, (1992).
3. B. De Boeck, "A review of containment accidents", *V Workshop on Containment Integrity*, Washington, (1992).
4. M. B. Marks, B. L. Spletzer, L. D. Lambert y J. R. Weatherby, "Containment performance experiments under severe accident loadings", Sandia National Laboratories, (1992).
5. M. Cervera y E. Hinton, "Non-linear Analysis of Reinforced Plates and Shells using a Three Dimensional Model", *Computational Modelling of Reinforced Concrete Structures*, Pineridge Press, (1986).
6. M. Cervera, E. Hinton y N. Bicanic, "Non-linear Transient Dynamic Analysis of Three Dimensional Reinforced Concrete Structures", *Numerical Methods in Transient and Coupled Analysis*. John Wiley, (1987).
7. M. Cervera, E. Hinton, N. Bicanic y J. Bonet, "Non-linear Transient Analysis of Three Dimensional Structures - A Finite Element Program for Steel and Reinforced Concrete Materials", *Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Pineridge Press, (1988).
8. A. Hanganu, S. Oller, E. Oñate y A. H. Barbat, "A Finite Element Model for Damage Analysis of Nuclear Reactor Containment Shells", en *Actas del II National Conference on Boundary and Finite Elements*, Sibiu, Rumanía, (1993).
9. O.Z. Zienkiewicz y R.L. Taylor, "*The Finite Element Method*", McGraw Hill, (1991).
10. P. Roca y A.R. Mari, "Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures", *Computers and Structures*, Vol. 46, No. 5, (1993).
11. M. A. Crisfield, "*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*", John Wiley, (1991).