Análisis matricial de estructuras

E. Blanco, M. Cervera y B. Suárez

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

ELENA BLANCO DÍAZ
MIGUEL CERVERA RUIZ
BENJAMÍN SUÁREZ ARROYO

Publicado por:

CIMNE

Análisis Matricial de Estructuras

Elena Blanco Díaz
Miguel Cervera Ruiz
Benjamín Suárez Arroyo

© Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) 2015
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España
www.cimne.com

Depósito legal: B-19107-2015
ISBN: 978-84-944244-5-8

PRÓLOGO

Este libro va dirigido a las personas interesadas en el análisis y diseño de estructuras de barras por métodos matriciales. En él, se exponen de forma clara y rigurosa los principios en los que se fundamenta el Análisis Matricial de Estructuras, destacando especialmente el desarrollo del Método de Rigidez, en el que se basan la casi totalidad de los programas modernos de Análisis de Estructuras por ordenador.

Los conocimientos previos que se recomiendan para la lectura provechosa del texto son los de Resistencia de Materiales y Álgebra Matricial a nivel básico. Los planteamientos teóricos de los diferentes temas son sencillos y su comprensión viene facilitada por la inclusión de la resolución detallada de numerosos ejemplos.

En el Capítulo 1 se realiza una breve revisión de los métodos, conceptos y principios fundamentales del Análisis de Estructuras de Barras.

En el Capítulo 2 se definen los principios en los que se apoya el cálculo matricial, la forma de considerar la geometría de una estructura genérica y el modo de tratar las cargas actuantes sobre ella.

En el Capítulo 3 se muestra la aplicación del Método de Rigidez a estructuras de plano medio. Se detallan los pasos necesarios para resolver una estructura según el Método de Rigidez y se describe el proceso de ensamblaje.

En el Capítulo 4 se extiende la aplicación del Método de Rigidez a otras tipologías de estructuras de barras, como los emparrillados planos, las estructuras reticuladas espaciales y estructuras articuladas planas y espaciales.

En el Capítulo 5 se presenta una formulación diferente de la matriz de rigidez y de flexibilidad, en función del vector deformación. Esta forma permite obtener las matrices de rigidez de barras curvas y/o de inercia variable.

El Capítulo 6 se dedica a tratar las simplificaciones que pueden realizarse cuando las estructuras de barras cumplen determinadas condiciones. Por último, se desarrolla el método de análisis por subestructuras, de interés en el caso de estructuras de cierta complejidad.

La presente edición es una nueva versión, revisada y ampliada, de la edición original de 2007. En esta nueva presentación, se ha completado el contenido con la adición de nuevas secciones y ejemplos, con el fin de facilitar la comprensión del curso.

Los autores agradecen a los profesores del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña su colaboración en la compilación y redacción de este libro. Agradecemos a Raúl Giménez por la delineación de figuras y esquemas que se incluyen.

E. Blanco Díaz
M. Cervera Ruiz
B. Suárez Arroyo

Barcelona, junio 2015

INDICE

Capítulo 1

GENERALIDADES SOBRE EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

1.1. INTRODUCCIÓN 1

1.2. ESTRUCTURAS CONTINUAS Y ESTRUCTURAS DE BARRAS 2

1.3. CONDICIONES DE CONTORNO 5

1.3.1. Apoyos 5

1.3.2. Enlaces 6

1.4. EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD 8

1.5. LINEALIDAD Y PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN 12

1.6. ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS 13

Ejemplo 1.6.1 16

Ejemplo 1.6.2 17

Ejemplo 1.6.3 18

1.7. INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA 19

Ejemplo 1.7.1 20

1.8. ACCIONES SOBRE LA ESTRUCTURA 21

1.9. MÉTODOS DE ANÁLISIS 23

1.10. UNICIDAD DE SOLUCIONES 27

Capítulo 2

LOS MÉTODOS MATRICIALES DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

2.1. INTRODUCCIÓN 29

2.2. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES 31

2.3. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA ESTRUCTURA 34

2.4. SISTEMAS DE REFERENCIA (GLOBAL Y LOCAL) 36
2.5. CARGAS ACTUANTES SOBRE LAS PIEZAS 37
Ejemplo 2.5.1 39
Ejemplo 2.5.2 41
2.6. FORMA MATRICIAL DE LAS ECUACIONES ELÁSTICAS 43
2.7. CONCEPTO DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD DE UNA PIEZA 46
2.8. TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS DE REFERENCIA 48
2.9. ESFUERZOS SEGÚN EJES LOCALES 50
2.10. ECUACIONES ELÁSTICAS SEGÚN EJES GLOBALES 50

Capítulo 3

EL MÉTODO DE RIGIDEZ

3.1. INTRODUCCIÓN 53
3.2. MATRIZ GLOBAL DE RIGIDEZ 54
3.2.1. Algoritmos de ensamblaje de la matriz global de rigidez 56
3.2.2 Optimización de la numeración de nudos 57
3.3. CONDICIONES DE APOYO 59
3.3.1. Movimientos prescritos según los ejes globales 59
3.3.2. Movimientos prescritos según los ejes locales 61
3.3.3. Apoyos elásticos 63
3.4. CÁLCULO DE MOVIMIENTOS, ESFUERZOS Y REACCIONES 64
3.4.1. Cálculo de los movimientos en los nudos 64
3.4.2. Cálculo de las reacciones 65
3.4.3. Cálculo de esfuerzos en extremo de barra 66
3.5. ARTICULACIONES 67
3.5.1. Articulaciones internas 67
3.5.2. Articulaciones en la sustentacion 73
3.6. EJEMPLOS 74
Ejemplo 3.6.1 74
Ejemplo 3.6.2 81

Ejemplo 3.6.3 87
Ejemplo 3.6.4 90

Capítulo 4

TIPOLOGÍAS DE ESTRUCTURAS DE BARRAS

4.1. INTRODUCCIÓN 94
4.2. EMPARRILLADOS PLANOS 94
Ejemplo 4.2.1 97
4.3. ESTRUCTURAS RETICULADAS ESPACIALES 104
Ejemplo 4.3.1 107
Ejemplo 4.3.2 114
4.4. ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS 122
Ejemplo 4.4.1 125
4.5. ESTRUCTURAS ARTICULADAS ESPACIALES 129
Ejemplo 4.5.1 132

Capítulo 5

MATRICES DE RIGIDEZ, FLEXIBILIDAD Y EQUILIBRIO

5.1. INTRODUCCIÓN 137
5.2. ECUACIONES DE EQULIBRIO Y MOVIMIENTO DE SÓLIDO RÍGIDO 138
5.3. MATRICES DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ DE UNA PIEZA PRISMÁTICA 141
Ejemplo 5.3.1 143
5.4. APLICACIONES 147
5.4.1. Efectos Térmicos 147
Ejemplo 5.4.1.1 147
5.4.2. Barra de inercia variable 149
5.4.3. Intervención del cortante en la deformación 151
5.5. PIEZAS FORMADAS POR ELEMENTOS CONECTADOS EN SERIE 153
Ejemplo 5.5.1 156
Ejemplo 5.5.2 159

Ejemplo 5.5.3 165
Ejemplo 5.5.4 166
5.6. ESTRUCTURAS DE BARRAS CONECTADAS EN SERIE Y EN PARALELO 174
5.6.1. Estructuras de barras con piezas conectadas en serie 175
Ejemplo 5.6.1.1 177
Ejemplo 5.6.1.2 180
5.6.2. Estructuras de barras con piezas conectadas en paralelo 187
Ejemplo 5.6.2.1 188
5.7. NUDOS DE TAMAÑO FINITO 191
5.8. NUDOS ELÁSTICOS 196
Ejemplo 5.8.1 201

Capítulo 6

MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y MÉTODO DE ANÁLISIS POR SUBESTRUCTURAS

6.1. INTRODUCCIÓN 206
6.2. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UNA BARRA RECTA 207
6.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UNA ESTRUCTURA RETICULADA 209
6.4. ESTRUCTURAS RETICULADAS CON SOPORTES INTERMEDIOS 213
6.5. MÉTODOS DE ANÁLISIS POR SUBESTRUCTURAS 216
Ejemplo 6.5.1 221
Ejemplo 6.5.2 227

BIBLIOGRAFÍA 235

Capítulo 1

GENERALIDADES SOBRE EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

1.1. INTRODUCCIÓN

La ingeniería estructural es la rama de la ingeniería que trata la concepción, el diseño y la construcción de las estructuras, basándose fundamentalmente en criterios de funcionalidad, seguridad, economía y estética. Se entiende por *estructura* aquella parte de la construcción que soporta el conjunto, es decir, que es capaz de resistir las acciones que actúan sobre ella (peso propio, sobrecarga de uso, viento, movimientos sísmicos, etc.).

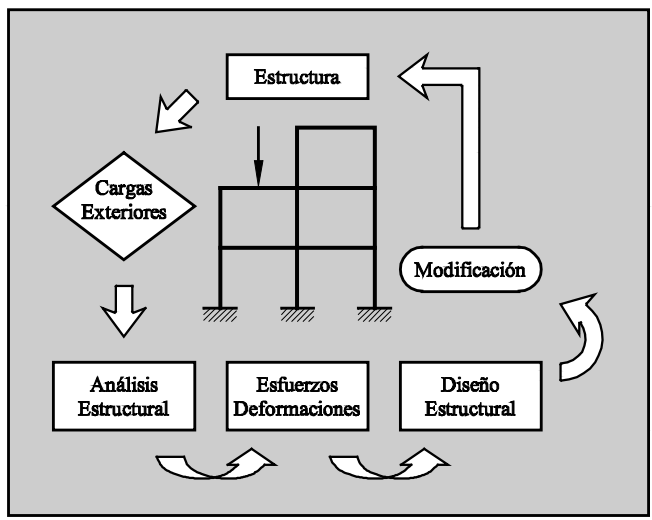


Figura 1.1: Secuencia operacional de un proyecto estructural

El análisis de estructuras en un sentido amplio, es el conjunto de métodos y técnicas que permiten estudiar el comportamiento de las estructuras bajo determinadas acciones, en las distintas etapas que éstas atraviesan. En un sentido más clásico, el análisis de estructuras busca establecer las condiciones de *resistencia* y *rigidez* de las estructuras analizadas a través de la Resistencia de Materiales y de la Teoría de la Elasticidad.

1.2. ESTRUCTURAS CONTINUAS Y ESTRUCTURAS DE BARRAS

Las estructuras según su geometría y su forma de trabajar pueden ser de diferentes tipologías. La estructura es *continua* cuando no pueden diferenciarse los distintos "elementos" que la componen, y es una *estructura de barras* cuando está formada por piezas prismáticas unidas entre sí.

Las estructuras continuas pueden ser estructuras *sólidas* o *masivas* (presas), o bien, *estructuras superficiales*, (placas, membranas, láminas) en las que puede identificarse un "espesor". El análisis de las estructuras continuas, en general, se basa, en la aplicación de métodos numéricos aproximados a las ecuaciones diferenciales o integrales de la Mecánica de Sólidos.

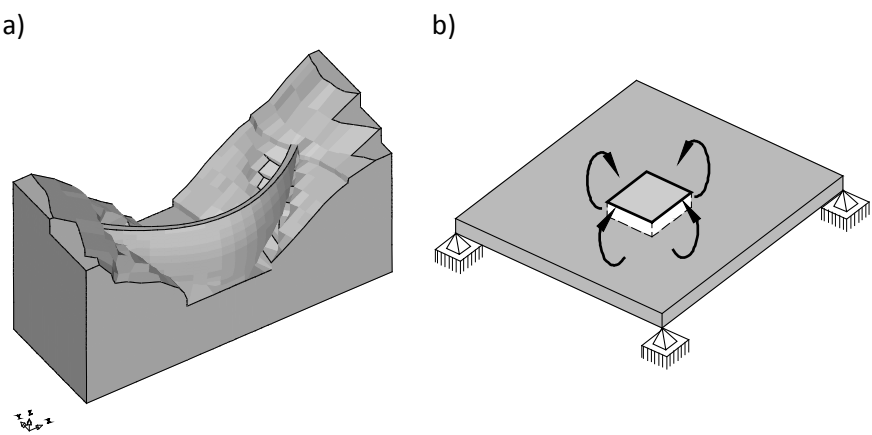


Figura 1.2: Estructuras continuas: (a) presa bóveda y su cimentación (estructura masiva), (b) placa trabajando a flexión (estructura superficial)

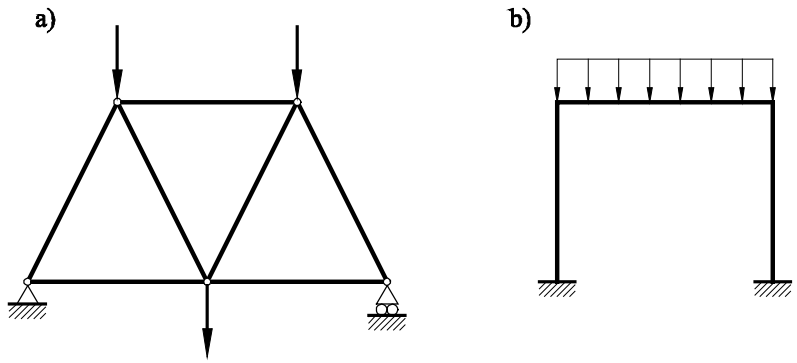


Figura 1.3: Estructuras de barras: (a) estructura articulada, (b) estructura reticulada

Las estructuras de barras, por el contrario, pueden resolverse aplicando los principios de la Resistencia de Materiales. Según éstos el análisis de una estructura de barras se reduce al problema de determinar las leyes de esfuerzos que actúan sobre las diferentes piezas que forman la estructura (Saint-Venant).

Se llama *estructura articulada* a la estructura formada por barras unidas entre sí mediante nudos articulados. Los nudos articulados son enlaces que impiden los desplazamientos relativos entre las barras que concurren a él.

Dichos enlaces no permiten transmitir momentos flectores de unas piezas a otras, las barras trabajan fundamentalmente a axil. En el caso de existir alguna carga transversal aplicada directamente sobre ellas, la flexión sería local. El análisis de una estructura articulada se reduce a determinar las leyes de esfuerzos axiles de las barras.

Se llama *estructura reticulada* a la estructura formada por piezas prismáticas unidas entre sí por nudos *rígidos*. Los nudos rígidos impiden los desplazamientos y los giros relativos de las barras que concurren a él. Dado que este enlace sí transmite momentos de una pieza a la otra, las barras trabajan fundamentalmente a flexión, y en algunos casos, también a torsión.

Las estructuras de barras pueden ser *planas* cuando las directrices de las piezas que la componen están contenidas en el mismo plano, o espaciales en caso contrario (ver Figura 1.4c). Dentro de las estructuras reticuladas planas existen dos casos particulares, las *estructuras de plano medio* y los *emparrillados planos.* Las primeras son aquellas en las

que el plano que contiene las directrices de las piezas, es a su vez plano de simetría de éstas y están sometidas a cargas contenidas en dicho plano medio (ver Figura 1.4a). Se llaman también *pórticos* cuando están formadas por soportes o dinteles y *marcos* cuando las piezas forman una célula cerrada.

Los *emparrillados planos* son los formados por piezas en las que las secciones rectas son simétricas respecto a planos perpendiculares al que contiene las directrices de las piezas (ver Figura 1.4b). Las barras de los emparrillados planos trabajan a flexo-torsión simple. En todo lo que sigue, se tratará específicamente de la resolución de estructuras de barras articuladas y reticuladas.

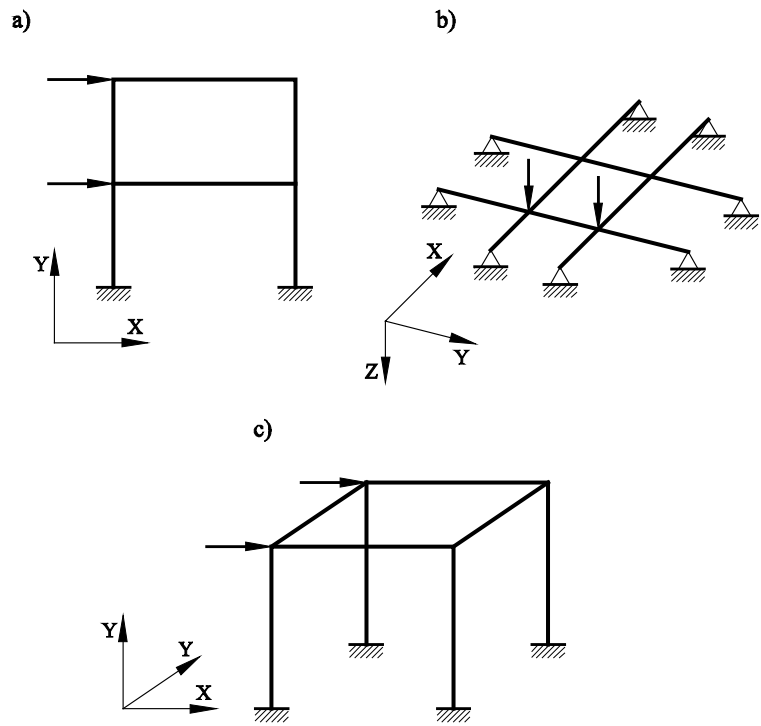


Figura. 1.4. Estructuras reticuladas: (a) de plano medio, (b) emparrillado plano, (c) espacial

1.3. CONDICIONES DE CONTORNO

Un problema estructural no está totalmente definido si no se introducen unas condiciones de contorno, e independientemente del método usado para resolver el mismo, la solución de dicho problema debe satisfacer siempre dichas condiciones.

Las condiciones de contorno en estructuras, se expresan en función de fuerzas y/o de desplazamientos en los nudos o en las barras. Así, por ejemplo, en la estructura que muestra la Figura 1.5, las condiciones de contorno en desplazamientos son:

$$\delta_{1X} = \delta_{1Y} = \phi_1 = \delta_{4X} = \delta_{4Y} = 0$$

y las condiciones de contorno en fuerzas son:

$$P_{2X} = 10\,kN \qquad P_{3Y} = 5\,kN \qquad P_{2Y} = M_2 = P_{3X} = M_3 = 0$$

1.3.1. Apoyos

El dispositivo que une la estructura al medio de sustentación se llama *apoyo*. El apoyo tiene una doble función, por un lado, impedir o limitar los movimientos de la estructura y por otro, trasmitir las cargas que soporta la estructura al medio de sustentación (ver Figura 1.5). Por cada movimiento impedido, el apoyo trasmite a la estructura una reacción que impide el movimiento. Estas reacciones son iguales y de sentidos opuestos a las fuerzas que la estructura trasmite al medio de sustentación.

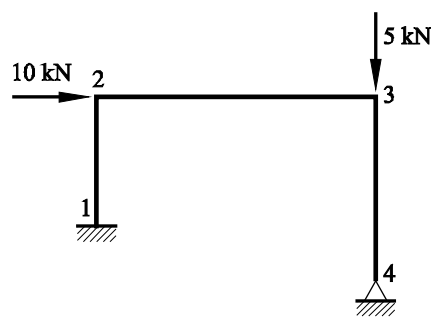


Figura 1.5: Acciones y restricciones en estructuras

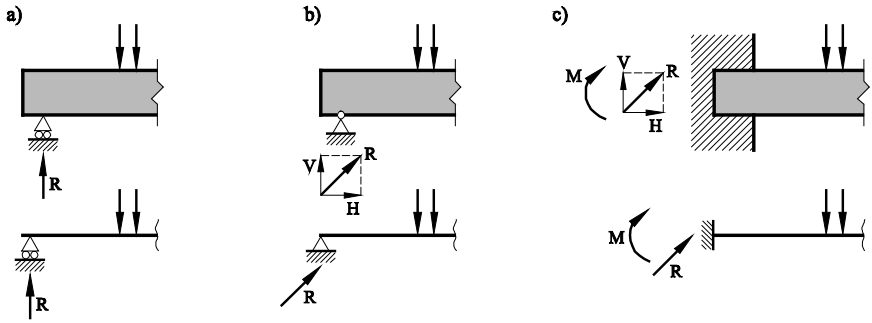


Figura. 1.6: Estructuras de plano medio: tipos de apoyos

En estructuras de plano medio, dado que una sección de una pieza tiene tres grados de libertad, dos traslaciones independientes en el plano medio y un giro perpendicular a éste, existirán varios tipos de apoyo, según coarten uno, dos o los tres grados de libertad de la sección de apoyo.

El apoyo *simple* o *articulado móvil* sólo coarta el movimiento de la sección de apoyo en una dirección, permitiendo la traslación en la dirección perpendicular y el giro de la sección (Figura 1.6a). La reacción que produce es una fuerza en la misma dirección que el movimiento impedido.

El apoyo *fijo* o *articulación* permite el giro de la sección de apoyo pero impide totalmente el movimiento de traslación (Figura 1.6b), en este caso la reacción que trasmite a la estructura es una fuerza de dirección y módulo desconocido.

El *empotramiento* impide todo movimiento de la sección de apoyo, tanto de traslación como de giro (Figura 1.6c). La reacción que se produce es una fuerza de posición, dirección y módulo desconocidos, se introducen tres incógnitas: dos componentes de la reacción y el momento sobre la sección de apoyo.

1.3.2. Enlaces

El dispositivo que une entre sí las diferentes piezas que forman una estructura se llama *enlace* o *nudo*. El enlace cumple la doble función de impedir o limitar los movimientos *relativos* de unas piezas respecto a otras, y de trasmitir las cargas que unas soportan a las demás.

Por cada grado de libertad coartado a la sección de enlace, éste trasmite a las piezas concurrentes una reacción interna. Estas reacciones son iguales y de sentidos opuestos en las dos secciones que se unen en la sección de enlace. En las estructuras de plano medio existen varios tipos de enlace según los movimientos relativos coartados a la sección de enlace.

El enlace deslizante sólo coarta el movimiento relativo en una dirección, permitiendo la traslación en dirección perpendicular y el giro de la sección de enlace (Figura 1.7a). La reacción que produce es un par de fuerzas iguales y opuestas en la dirección del movimiento impedido.

El *nudo articulado* o *articulación* impide totalmente la traslación relativa de la sección de enlace, pero permite el giro relativo de la misma (Figura 1.7b) La reacción que introduce es un par de fuerzas de dirección y módulo desconocido; el momento flector es necesariamente nulo.

El *empotramiento* o *nudo rígido* impide todo tipo de movimiento relativo de la sección de enlace (Figura 1.7c). La reacción que produce es un par de fuerzas de posición, dirección y módulo desconocidos. Por tanto en un nudo rígido las incógnitas son dos componentes de la reacción y el momento de la sección de enlace.

Los apoyos y enlaces considerados para estructuras de plano medio pueden generalizarse para estructuras espaciales. En este caso, el número de grados de libertad es seis (tres traslaciones y tres giros) y por

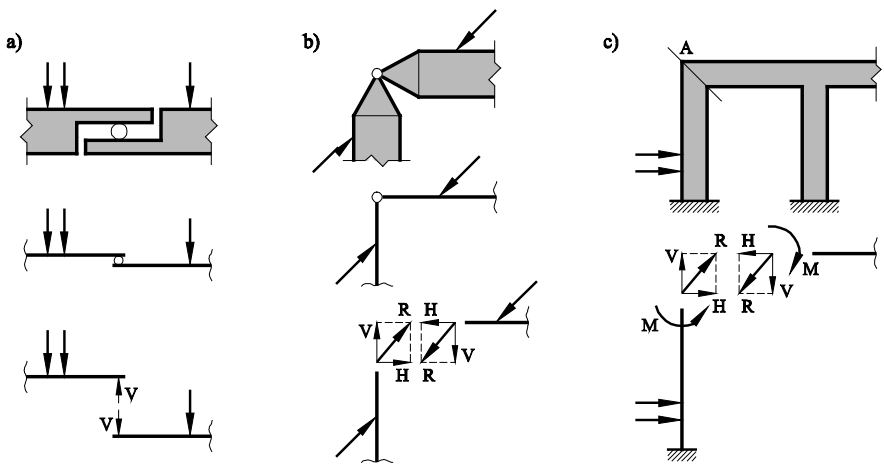


Figura 1.7: Estructuras de plano medio: tipos de enlaces

tanto, el número de apoyos y enlaces posibles es mucho mayor.

Por último, deben citarse los *apoyos* o *enlaces elásticos*. La particularidad de este tipo de apoyos o enlaces respecto a los apoyos o enlaces rígidos, anteriormente considerados, es su capacidad de deformarse de forma proporcional (lineal) a las reacciones o esfuerzos que actúan sobre ellos.

1.4. EQUILIBRIO Y COMPATIBILIDAD

Las fuerzas, incluyendo dentro de este concepto las acciones y las reacciones que actúan sobre una estructura, deben estar en *equilibrio estático*, es decir, deben formar un sistema de fuerzas de resultante nula y de momento resultante nulo. Las ecuaciones que expresan estas dos condiciones se conocen con el nombre de *ecuaciones de la estática*:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$
$$\sum_i \vec{M}_i^{\,o} = 0 \qquad (1.1)$$

donde $\vec{F}_i$ representa a cada una de las fuerzas que actúan sobre la estructura y $\vec{M}_i^{\,o}$ representa el momento de cada una de las fuerzas respecto de un punto arbitrario *O*. Debe destacarse que las condiciones de equilibrio estático y las correspondientes ecuaciones matemáticas que lo expresan, deben cumplirse no sólo en la estructura en su conjunto, sino que también deben satisfacerse para cada parte integrante de ella, siempre que se considere de forma explícita las fuerzas y momentos que el resto de la estructura ejerce sobre la parte considerada.

Para que haya realmente equilibrio en una estructura y no existan mecanismos parciales, es condición necesaria y suficiente que estén en equilibrio todas y cada una de sus partes integrantes. Así, en una estructura de barras, cada una de las piezas prismáticas que la forman debe estar en equilibrio, siempre que se consideren las fuerzas y momentos de extremo de barra que la estructura ejerce sobre las piezas.

De igual modo, los nudos de la estructura deben estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas y momentos que actúan en los extremos de las barras que concurren en ellos (ver Figuras 1.8 y 1.9).

Estas condiciones de equilibrio deben satisfacerse bajo cualquier hipótesis cinemática que se adopte, y en particular, bajo *la hipótesis de los pequeños movimientos*. En este caso, las ecuaciones de equilibrio pueden escribirse sobre la geometría no deformada de la estructura.

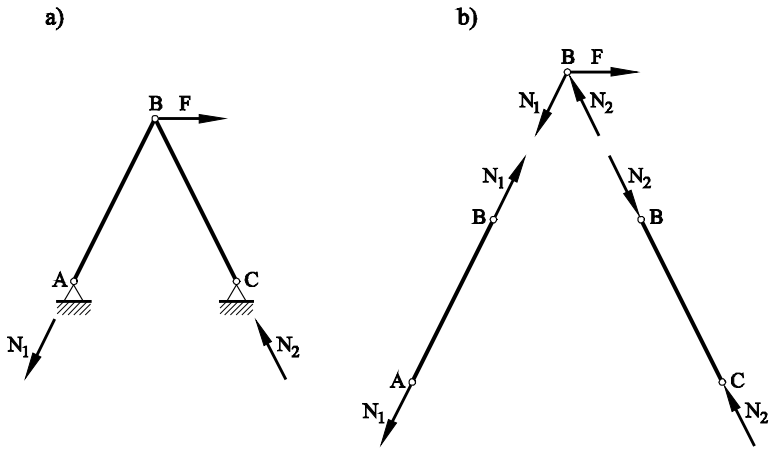


Figura 1.8: Estructura articulada: (a) equilibrio global, (b) equilibrio de piezas y de nudos

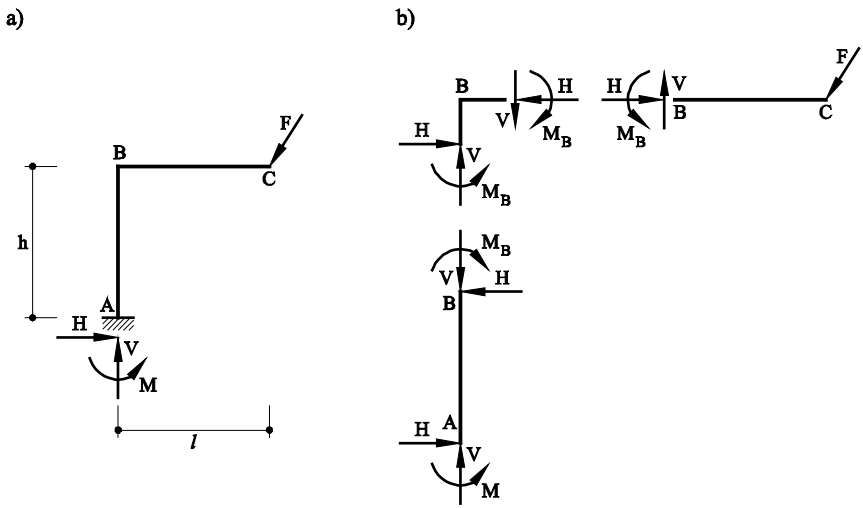


Figura 1.9: Estructura reticulada: (a) equilibrio global, (b) equilibrio de piezas y de nudos

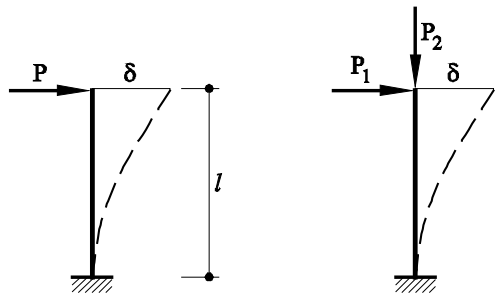


Figura 1.10: *Influencia de la deformación en la flexión de una ménsula*

En muchos casos prácticos, este requisito se cumple pero en otros, por ejemplo: arcos esbeltos, puentes colgantes etc., el cambio de geometría juega un papel importante. En los dos estados de carga de la Figura 1.10 se supone que δ es el mismo. Esta hipótesis es aceptable siempre que δ sea pequeño, de forma que la presencia de P_2 no altere la flexión de la ménsula; es decir, siempre que el momento $P_2 \times \delta$ sea despreciable frente al momento $P_1 \times l$.

Las teorías que tienen en cuenta en el análisis, el cambio de geometría que produce la deformación (grandes desplazamientos) no serán tratadas en este libro.

Las condiciones de equilibrio no son las únicas que se deben considerar en el comportamiento de las estructuras. En el proceso de deformación de la estructura bajo la acción de las cargas deben satisfacerse las condiciones de *compatibilidad* sobre deformaciones y movimientos. Dichas condiciones de compatibilidad se traducen en los siguientes requisitos fundamentales:

- *condiciones de apoyo*: la deformación debe ser tal que se cumplan las limitaciones de movimiento impuestas por los apoyos,
- *continuidad en los nudos*: la deformación debe ser tal que los extremos de las barras que concurran a un nudo cumplan las limitaciones de movimiento impuestas por el correspondiente enlace,

- *continuidad en las barras*: la deformación debe ser tal que se mantenga la continuidad de las piezas consideradas como elementos estructurales, es decir, que no se produzcan en ellas huecos ni solapamientos.

Estas condiciones de compatibilidad deben satisfacerse bajo cualquier hipótesis que se adopte, y en particular, bajo la hipótesis de los pequeños movimientos. En las Figuras 1.11 y 1.12 se muestra la deformada de una estructura articulada y de una estructura reticulada, respectivamente.

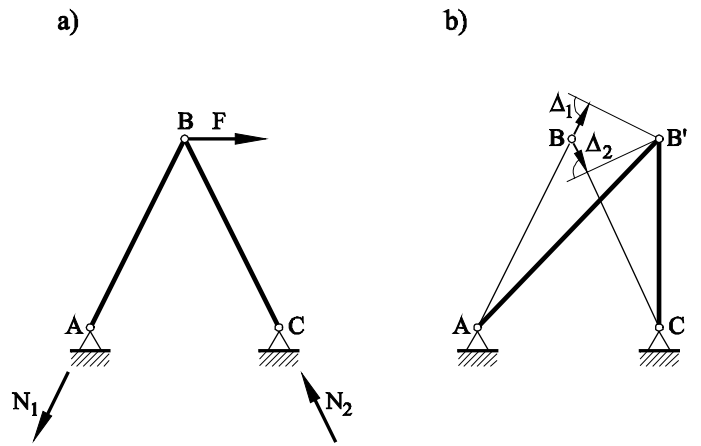


Figura 1.11: Movimientos en una estructura plana articulada

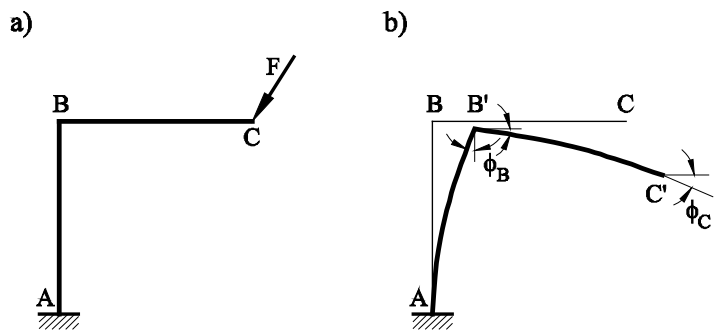


Figura 1.12: Movimientos en una estructura plana reticulada

1.5. LINEALIDAD Y PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Los métodos de análisis de estructuras que se emplean en la Mecánica de Estructuras se basan en los principios básicos de equilibrio y de compatibilidad. Además, en una gran parte de ellos se supone que la estructura cumple con el Principio de Linealidad.

Si se admiten las dos hipótesis siguientes:

- *linealidad geométrica*, es decir que los movimientos (desplazamientos y giros) que se producen son pequeños (hipótesis de los pequeños movimientos). Se entiende que los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones geométricas de la estructura (espesor, luz, etc.); los giros son pequeños comparados con la unidad.
- *linealidad material*, es decir, que la relación entre tensiones y deformaciones es elástica y lineal (los materiales cumplen la ley de Hooke generalizada).

El problema de determinar los esfuerzos y movimientos que se producen en una estructura por acción de las cargas es *lineal*, esto es, la respuesta de la estructura es una función lineal de la solicitación. Hay que resaltar que ninguna de las dos hipótesis anteriores son principios fundamentales, sino que se adoptan porque su aplicación se traduce en dos consecuencias importantes:

- garantizan que la solución del problema estructural que satisface simultáneamente las condiciones de equilibrio y compatibilidad, *existe* y es *única*, y es independiente del método empleado para hallarla.
- permiten adoptar simplificaciones importantes en el planteamiento del problema estructural, tanto al imponer las condiciones de equilibrio como las de compatibilidad.

La consecuencia directa de las hipótesis de linealidad es el Principio de Superposición que establece que *los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura son iguales a la suma de los efectos que cada una de las fuerzas origina por separado*.

Alternativamente, se puede enunciar diciendo que los efectos que un sistema de fuerzas origina sobre una estructura no dependen del orden de aplicación de las fuerzas del sistema sobre la estructura (ver Figura 1.13).

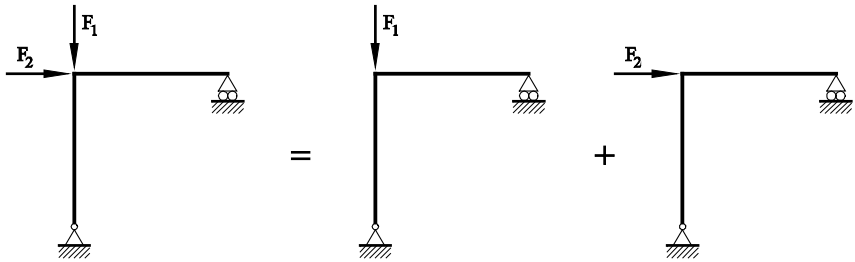


Figura 1.13: Principio de Superposición

1.6. ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS

En Mecánica de Estructuras *resolver* una estructura significa calcular el valor de los esfuerzos que actúan sobre cada una de las secciones de las piezas que la componen. Cuando este cálculo puede hacerse íntegramente utilizando sólo las *ecuaciones de la estática*, la estructura se llama *isostática* o *estáticamente determinada*.

Por el contrario, cuando dichas ecuaciones son insuficientes, las estructuras se llaman *hiperestáticas* o *estáticamente indeterminadas*, y para resolverlas es necesario imponer, adicionalmente, condiciones de compatibilidad sobre sus movimientos (ver Figura 1.14).

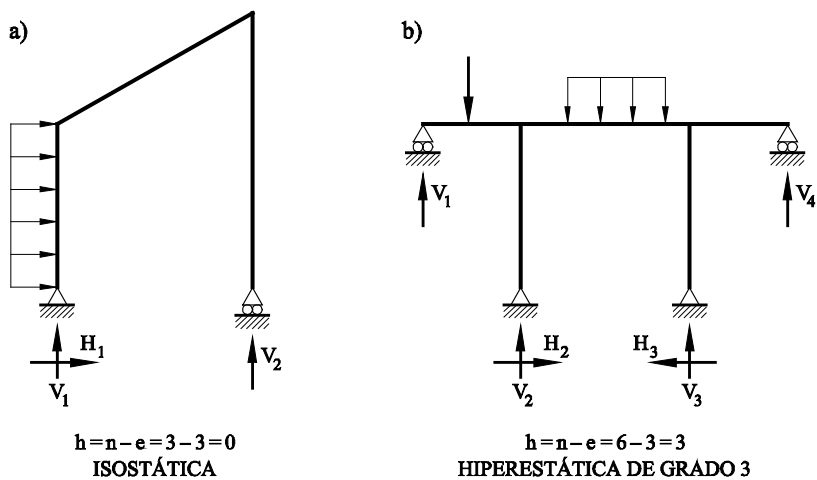


Figura 1.14: Grado de hiperestatismo externo para estructuras de varias piezas

Si la estructura es articulada, sus barras trabajan a esfuerzo axil y resolver la estructura es hallar los valores de los esfuerzos axiles de las distintas barras. Si la estructura es isostática esto puede hacerse aplicando sólo las condiciones de equilibrio de fuerzas en los nudos.

Por el contrario, si la estructura es hiperestática es necesario considerar los movimientos de los nudos que deben ser compatibles con las elongaciones por esfuerzo axil que sufran las barras que concurran a ellos.

Si la estructura es reticulada, sus barras trabajan, en general, a flexión compuesta y torsión, y resolver la estructura consiste en determinar las leyes de momentos flectores, esfuerzos cortantes, axiles y momentos torsores, cuando corresponda, que actúan en las distintas barras.

Si la estructura es isostática esto puede hacerse aplicando sólo las ecuaciones de equilibrio en los nudos. Si la estructura es hiperestática es necesario considerar los movimientos de los nudos (desplazamientos y giros) que deben ser compatibles con las deformaciones que sufran las barras concurrentes a ellos. Dada la multiplicidad de esfuerzos que actúan en las estructuras reticuladas su resolución es más compleja que en las estructuras articuladas.

Las estructuras reticuladas formadas por varias piezas pueden ser *estáticamente indeterminadas*, a pesar de que la totalidad de las reacciones exteriores puedan determinarse por condiciones de equilibrio. En este caso, se dice que la estructura es *internamente hiperestática*, esto significa que aunque se conozcan sus reacciones exteriores no es posible determinar las leyes de esfuerzos en todas las secciones (ver Figura 1.15).

El *grado de indeterminación estática* o *grado de hiperestatismo* de una estructura, se define de forma general, como el número mínimo de fuerzas (o momentos) que es necesario conocer para determinar completamente las leyes de esfuerzos y puede calcularse como la diferencia:

$$h = n - pe \tag{1.2}$$

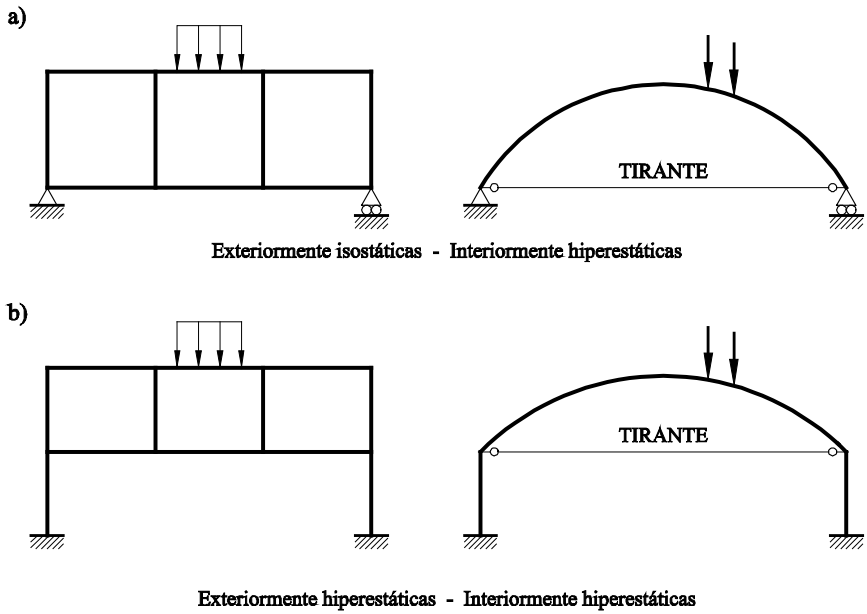


Figura 1.15: Concepto de hiperestatismo interno

donde *n* es el número de reacciones (externas o internas) que hay que conocer para determinar los esfuerzos en cualquier sección de la estructura, *e* es el número de ecuaciones de equilibrio de la estática y *p* es el número de partes en que queda dividida la estructura al hacer los cortes necesarios para poder determinar los esfuerzos. Cada una de las partes resultantes de dividir la estructura debe ser isostática, por tanto, debe satisfacer las ecuaciones de equilibrio estático. Una vez calculado el valor *h*, si resulta

$h = 0$ el número de incógnitas es el mismo que el de ecuaciones de la estática, la estructura es *isostática*.

$h > 0$ hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *hiperestática* de grado *h.*

$h > 0$ hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura es un *mecanismo* de grado *h.*

Ejemplo 1.6.1

Determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura de la Figura 1.16.

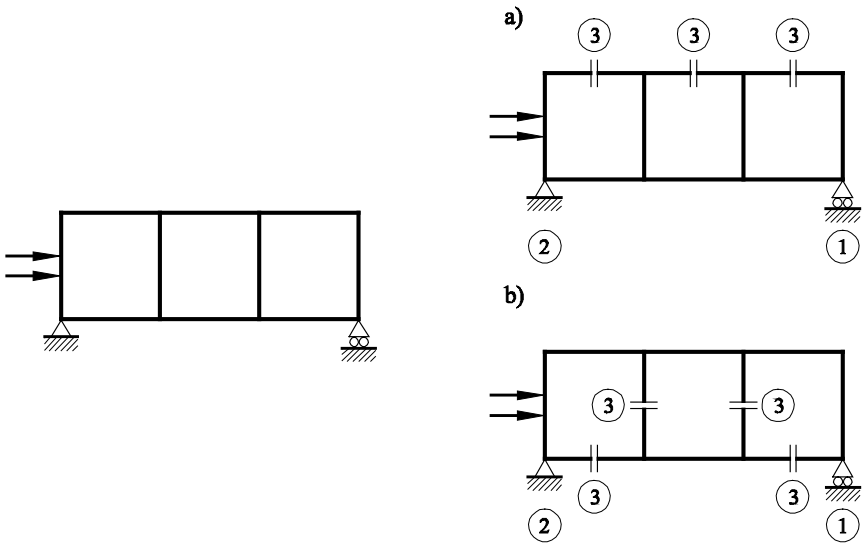


Fig. 1.16: Estructura del Ejemplo 1.6.1

La estructura es externamente isostática, pero internamente hiperestática, ya que es una estructura reticulada, es decir, de nudos rígidos, formada por tres células cerradas. Una célula cerrada es siempre hiperestática, ya que en ella no se pueden determinar las leyes de esfuerzos si no se conocen éstos al menos en una sección cualquiera. Con esto se introducen, naturalmente, tres incógnitas, los tres esfuerzos desconocidos en el enlace liberado.

En la Figura 1.16a se ha convertido la estructura en isostática cortando las tres células en su parte superior. Aplicando ahora la fórmula de la ecuación (1.2), con n = 12 (3 incógnitas exteriores más 3 x 3 incógnitas interiores), p = 1 (la estructura isostática consta de una sola parte) y e = 3 (al ser el sistema plano). El grado de hiperestatismo de la estructura es, por tanto, 9.

En la figura 1.16b se ha adoptado un proceso alternativo: se han introducido cuatro "cortes", que introducen 3 x 4 incógnitas internas, pero que dividen a la estructura en p = 2 partes.

Al aplicar ahora la ecuación (1.2) con n = 15 (3 incógnitas exteriores más 3 x 4 incógnitas interiores) y p = 2 (la estructura isostática consta ahora de dos partes), el grado de hiperestatismo de la estructura resulta ser 9 Obsérvese que el grado de hiperestaticidad es, naturalmente, independiente de por dónde y cómo se dan los cortes para convertir la estructura en isostática.

Ejemplo 1.6.2

Determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura de la Figura 1.17.

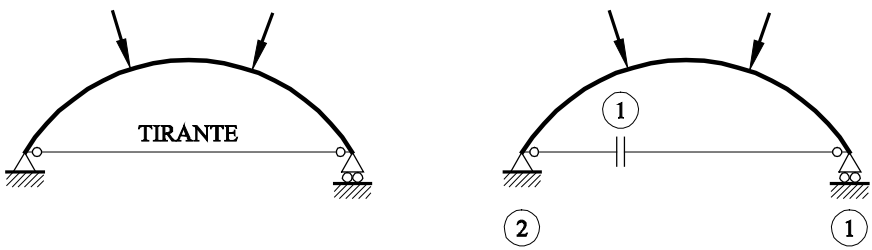


Fig. 1.17: Estructura del Ejemplo 1.6.2

La estructura de la Figura 1.17 es externamente isostática, pero internamente hiperestática, puesto que tiene una célula cerrada. Para abrir la célula basta cortar el tirante inferior, es decir, liberar el enlace interno que el cable representa.

Al hacer esto, se introduce una sola incógnita interna, el axil de tracción del cable. El grado de hiperestatismo de la estructura es obviamente 1, ya que basta conocer una incógnita interna para convertirla en isostática.

Ejemplo 1.6.3

Determinar el grado de hiperestaticidad de la estructura de la Figura 1.18.

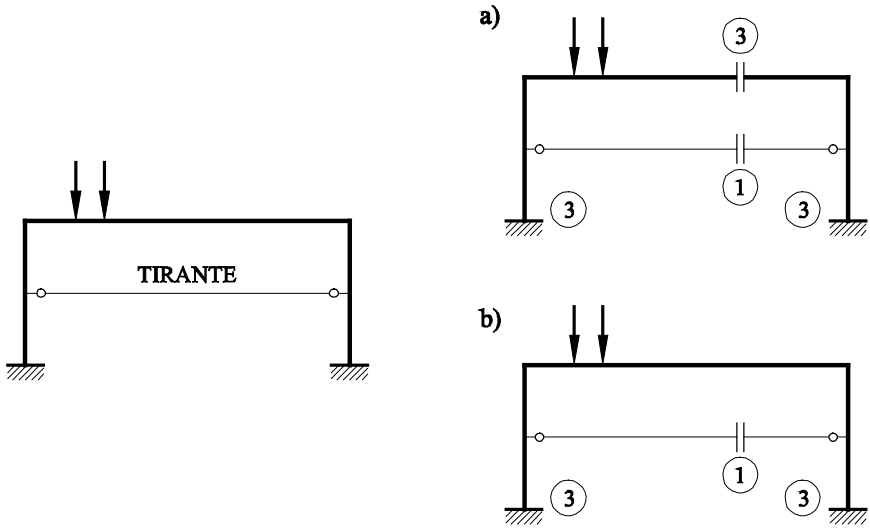


Fig. 1.18: Estructura del Ejemplo 1.6.3

Se resuelve liberando enlaces de dos formas alternativas. En la Figura 1.18a se ha convertido la estructura en isostática cortando la célula en su parte superior y el tirante.

Aplicando ahora la fórmula de la ecuación (1.2), con n = 10 (6 incógnitas exteriores más 4 incógnitas interiores), p = 2 (la estructura isostática consta de dos partes) y e = 3 (al ser el sistema plano). El grado de hiperestatismo de la estructura es, por tanto, 4.

En la figura 1.18b se ha adoptado un proceso alternativo: para "abrir" la célula superior sólo se corta el tirante, es decir se libera el enlace interno que representa el tirante.

Al aplicar ahora la ecuación (1.2) con n = 7 (6 incógnitas exteriores más 1 incógnita interna) y p = 1, el grado de hiperestatismo de la estructura resulta ser 4. Nuevamente puede comprobarse que el grado de hiperestaticidad es independiente de por dónde y cómo se dan los cortes.

1.7. INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA

En general, las piezas que forman las estructuras de barras, trabajan a flexión compuesta y a torsión. Por tanto, las rebanadas diferenciales de las piezas están sometidas a la acción combinada de esfuerzos axiles y cortantes y momentos flectores y torsores.

Cada uno de los esfuerzos produce una cierta deformación. Así, por ejemplo, el esfuerzo axil produce un alargamiento uniforme de todas las fibras, el momento flector produce un giro diferencial entre las secciones extremas, el esfuerzo cortante produce una distorsión media y alabeo diferencial y el momento torsor produce un giro de torsión.

Conocidas las leyes de esfuerzos de una estructura, es posible cuantificar el valor de los efectos sobre las diferentes rebanadas de una pieza y calcular los movimientos (relativos) que se producen entre unos puntos y otros de la pieza.

El número mínimo de movimientos (desplazamientos y giros) que es preciso conocer para determinar completamente el estado deformacional de una estructura se llama *grado de indeterminación cinemática*. La deformación que sufre la estructura debe cumplir las condiciones de compatibilidad, por tanto, suponiendo que los movimientos en las piezas individuales son continuos, el grado de indeterminación cinemática *k* puede calcularse como la diferencia:

$$k = gl \cdot nn - ca \tag{1.3}$$

donde *gl* es el número de grados de libertad por nudo, *nn* es el número de nudos de la estructura y *ca* es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo.

El número de grados de libertad por nudo está determinado por el tipo de estructura y por las condiciones de compatibilidad de las barras que a él concurren. En estructuras articuladas espaciales el número de grados de libertad por nudo es 3 (tres traslaciones), téngase presente que en este tipo de estructuras los giros relativos entre las barras concurrentes son libres.

En estructuras reticuladas espaciales, los grados de libertad por nudo son 6 (tres traslaciones y tres giros), ya que los giros relativos entre las barras están impedidos.

En los emparrillados planos, *gl* = 3, dos giros en el plano de la estructura y una traslación perpendicular a éste.

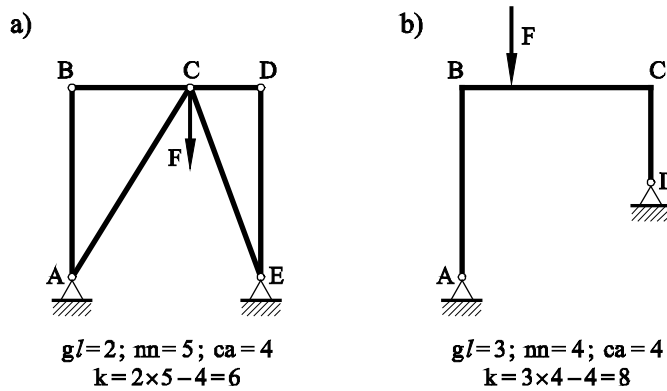


Figura 1.19: Grado de indeterminación cinemática

En estructuras articuladas planas, *gl* = 2, porque el movimiento fuera del plano de la estructura es nulo (ver Figura 1.19a) y en estructuras reticuladas de plano medio *gl* = 3, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste (ver Figura 1.19b).

Ejemplo 1.7.1

Determinar el grado de indeterminación cinemática de la estructura de la Figura 1.20.

En la estructura de la Figura 1.20, si se supone que las barras *AB* y *CD* son inextensibles, los movimientos de los nudos *B* y *C* deben producirse sobre las rectas perpendiculares a las barras *AB* y *CD*, respectivamente; si la barra *BC* es también inextensible, los movimientos de *B* y *C* deben ser tales que su longitud se mantenga invariable. Por tanto la barra *AB* sufre una rotación con centro en el punto *A*, la barra *CD* sufre una rotación con centro en el punto *D* y la barra *BC* sufre una rotación con centro en el punto O.

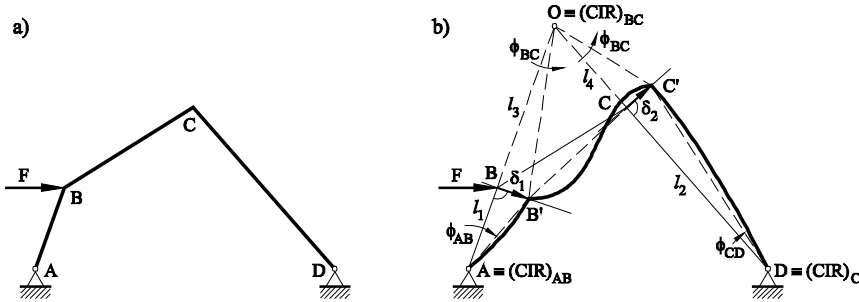


Fig. 1.20: Estructura del Ejemplo 1.7.1

Los puntos *A*, *D* y *O* son los centros instantáneos de rotación (CIRs) de las barras *AB*, *CD* y *BC*, respectivamente. Nótese también que los nudos *B* y *C* son rígidos, y que mantienen su ángulo constante en la deformación.

Aplicando la ecuación (1.3) el grado de indeterminación cinemática es $k = 3 \times 4 - 4 - 3 = 5$, y la deformación de la estructura queda determinada, por ejemplo, por la traslación horizontal de la barra *BC* (1) y los giros de los nudos (4).

El valor de los movimientos laterales de los nudos *B* y *C*, δ_1 y δ_2, se puede relacionar con las rotaciones ϕ_{AB}, ϕ_{BC} y ϕ_{CD} de las barras *AB*, *CD* y *BC*, respectivamente, mediante las igualdades:

$$\delta_1 = \phi_{AB} \cdot l_1 = \phi_{BC} \cdot l_3$$

$$\delta_2 = \phi_{CD} \cdot l_2 = \phi_{BC} \cdot l_4$$

1.8. ACCIONES SOBRE LA ESTRUCTURA

Las estructuras normalmente se estudian bajo las acciones de sistemas de fuerzas y momentos aplicados. Sin embargo, pueden presentarse, dos tipos de situaciones de interés:

- *movimientos impuestos*, como por ejemplo, desplazamientos y giros de apoyos, y
- *deformaciones impuestas* debidas a *causas externas* (variación de temperatura ambiente) o *internas* (variación de humedad, pretensado, defectos de montaje, etc.).

El comportamiento de las estructuras frente a este tipo de acciones es muy diferente, según se trate de estructuras isostáticas o hiperestáticas.

En las *estructuras isostáticas* las reacciones y las leyes de esfuerzos pueden determinarse a partir de las ecuaciones de equilibrio. Si no actúan sobre ellas sistemas de cargas aplicadas, las condiciones de equilibrio determinan que las reacciones en los apoyos sean nulas y por tanto, las leyes de esfuerzos también lo son. En la Figura 1.21 puede verse que las estructuras isostáticas se deforman libremente bajo la acción de movimientos y deformaciones impuestos, siempre que sean compatibles con sus condiciones de apoyo isostáticas. Nótese que el proceso de deformación no produce reacciones exteriores ni esfuerzos interiores, por consiguiente, no genera tensiones.

En las *estructuras hiperestáticas*, el grado de indeterminación estática permite que existan sistemas de reacciones autoequilibradas, es decir que satisfacen las ecuaciones de equilibrio aunque no existan fuerzas ni momentos externos.

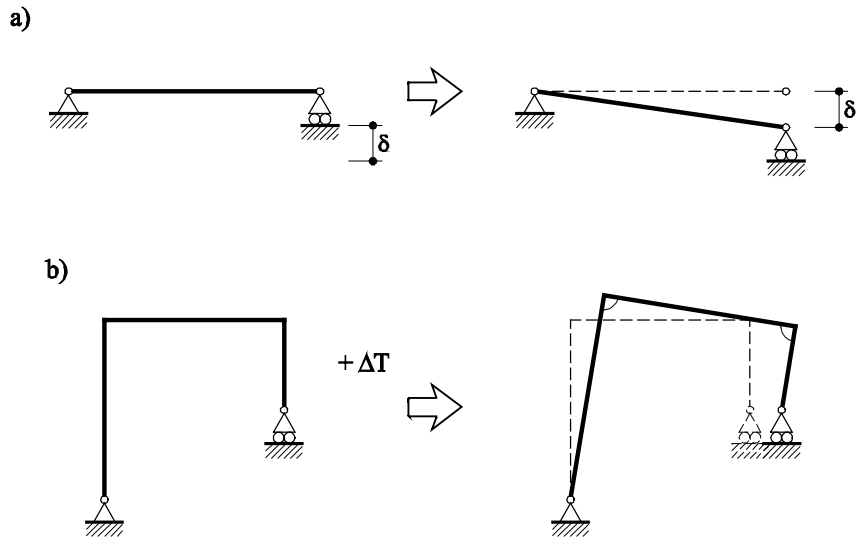


Figura 1.21: Estructuras isostáticas con movimientos y deformaciones impuestos

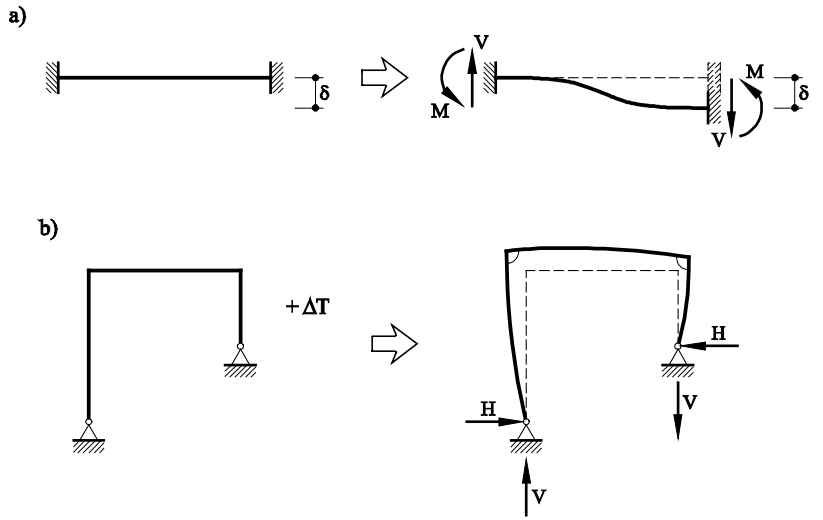


Figura 1.22: Estructuras hiperestáticas con movimientos y deformaciones impuestos

Además, su grado de indeterminación cinemática exige que la deformación de la estructura cumpla determinadas condiciones de compatibilidad en los apoyos, que en general, dan lugar a reacciones y esfuerzos Figura 1.22). En las estructuras hiperestáticas, por tanto, los movimientos y deformaciones impuestas generan tensiones, circunstancia que hay que tener muy en cuenta, ya que puede originar el colapso total o parcial.

1.9. MÉTODOS DE ANÁLISIS

Todos los métodos de análisis de estructuras articuladas y reticuladas hacen uso de tres condiciones básicas que deben satisfacer tanto las fuerzas como los movimientos determinados en los extremos de las barras y en los nudos:

1) Las fuerzas que actúan en el extremo de una barra y los movimientos de la misma, deben satisfacer las ecuaciones deducidas del diagrama σ - ε del material que la forma.
2) Los movimientos de los extremos de las barras deben ser compatibles con los de los nudos a los que están unidas dichas barras: *condiciones de compatibilidad.*

3) Las fuerzas que actúan en los extremos de cada barra deben mantener el equilibrio: *condiciones de equilibrio.*

El cálculo de esfuerzos en estructuras isostáticas es relativamente directo y las condiciones de equilibrio son suficientes para determinar todos los esfuerzos que actúan en las distintas barras de la estructura. A partir de la geometría de la estructura y de la definición de las acciones se calculan las reacciones, estableciendo las condiciones de equilibrio de la estructura. Partiendo de las condiciones de equilibrio de las piezas se calculan los esfuerzos en cada una de ellas. Se continúa calculando la deformación de las piezas, a partir de las condiciones de compatibilidad de las barras y finalmente partiendo de las condiciones de compatibilidad de apoyos y enlaces se calculan los movimientos en la estructura.

El cálculo de una estructura hiperestática precisa considerar *conjuntamente* las condiciones de equilibrio y compatibilidad, dado su grado de indeterminación estática y cinemática, por lo que el cálculo deriva en un proceso más o menos complejo. En sentido amplio, los métodos de resolución de estructuras pueden englobarse en dos grandes grupos en función del orden de aplicación de las condiciones de equilibrio y de compatibilidad.

A. ***Método de compatibilidad***.

Básicamente consiste en transformar la estructura hiperestática en otra isostática, suprimiendo apoyos o enlaces redundantes, sustituyéndolos por fuerzas o esfuerzos incógnita. El número de incógnitas del problema es el grado de hiperestatismo del mismo.

Sobre esta estructura isostática base pueden aplicarse las condiciones de equilibrio a priori, particularmente pueden expresarse los movimientos de la misma en función de las incógnitas hiperestáticas. Por tanto, se pueden imponer a posteriori las condiciones de compatibilidad, anteriormente liberadas, obteniéndose el número de ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas hiperestáticas.

Este procedimiento de resolución puede verse en la Figura 1.23; el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las secciones:

1. definir la estructura isostática base, seleccionando las incógnitas hiperestáticas y liberando las correspondientes condiciones de compatibilidad,
2. resolver la estructura isostática base, en función de las incógnitas hiperestáticas y satisfaciendo las condiciones de equilibrio,
3. determinar las incógnitas hiperestáticas, imponiendo las necesarias condiciones de compatibilidad,
4. determinar las reacciones, esfuerzos y movimientos en la estructura hiperestática original.

Nótese que en este método se utilizan primero las condiciones de equilibrio, y posteriormente, las condiciones de compatibilidad. Se le conoce también por los nombres de "*método de las fuerzas*", dado que las incógnitas hiperestáticas seleccionadas para resolver el problema son fuerzas hiperestáticas, o "*método de flexibilidad*", ya que los coeficientes que aparecen en las ecuaciones que se plantean son de flexibilidad.

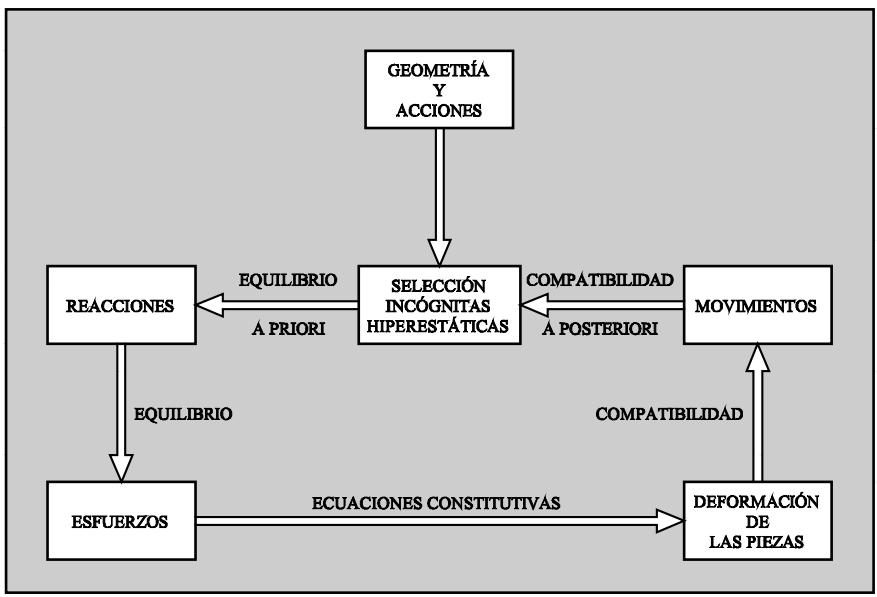


Figura 1.23: Resolución de estructuras por el método de compatibilidad

B. *Método de equilibrio*.

El método consiste en identificar el número de movimientos incógnita que determinan la deformación de la estructura, satisfaciendo *a priori* las condiciones de compatibilidad de movimientos en los nudos de la estructura. El número de incógnitas del problema es, por tanto, el grado de indeterminación cinemática del problema.

De forma general, dichos movimientos son los giros y los desplazamientos de los nudos, que luego pueden reducirse según las condiciones adicionales de compatibilidad del problema. Imponiendo *a posteriori* las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos en los nudos en que concurren diferentes barras y en los apoyos, se obtiene el número de ecuaciones necesarias para resolver las incógnitas cinemáticas.

Este procedimiento de resolución puede verse en la Figura 1.24; el proceso secuencial consiste en, a partir de la geometría de la estructura y de la definición de las secciones:

1. identificar el número *mínimo* de movimientos incógnitas que determinan la deformación de la estructura, teniendo en cuenta las correspondientes condiciones de compatibilidad en los nudos,
2. resolver las piezas individuales, en función de las incógnitas cinemáticas, en base a satisfacer las condiciones de compatibilidad en las piezas,
3. determinar las incógnitas cinemáticas, imponiendo las necesarias condiciones de equilibrio en los nudos,
4. determinar los movimientos, esfuerzos y reacciones en la estructura.

Nótese que en este método se utilizan en primer lugar las condiciones de compatibilidad, y posteriormente las condiciones de equilibrio. Se lo conoce también por los nombres de “método de los movimientos”, dado que las incógnitas seleccionadas para resolver el problema son los movimientos de los nudos, o “método de rigidez”, ya que los coeficientes que aparecen en las ecuaciones que se plantean son de rigidez.

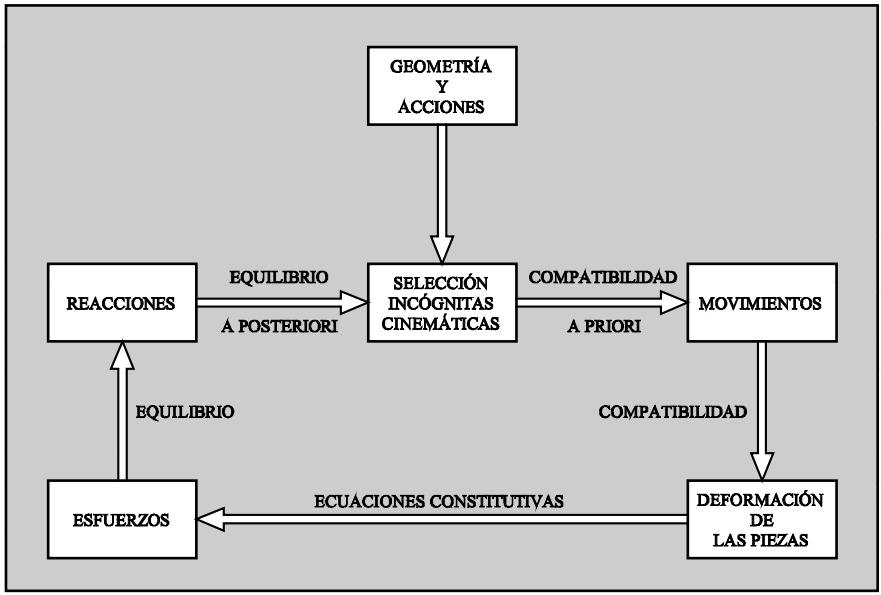


Figura 1.24: Resolución de estructuras por el método de equilibrio

Es un método general de análisis de estructuras, ya que puede aplicarse para resolver estructuras isostáticas e hiperestáticas indistintamente.

Tanto los Métodos de Compatibilidad como los de Equilibrio pueden plantearse de cara a su resolución automática, dando lugar a los Métodos de Flexibilidad y de Rigidez, respectivamente. Sin embargo, los segundos cuentan con la importante ventaja sobre los primeros de que su formulación es más sistemática. En la práctica, la casi totalidad de los programas modernos de Cálculo de Estructuras, ya sean éstas de barras o continuas, se basan en el Método de Rigidez. En los siguientes capítulos se muestra la aplicación del Método de Rigidez a la resolución de estructuras de barras y se proporcionan las bases necesarias para incorporar todos los conceptos en un programa de ordenador.

1.10. UNICIDAD DE SOLUCIONES

No son posibles soluciones alternativas a los problemas de análisis estructural. Para un conjunto de cargas externas, tanto la deformación

como los esfuerzos en todas las barras y las reacciones en los apoyos de la estructura, son únicos (Teorema de unicidad de Kirchhoff).

Esto se puede demostrar fácilmente por deducción al absurdo puesto que si un mismo estado de cargas origina dos soluciones diferentes, el estado obtenido por diferencia de ambas situaciones presenta una deformación y unos esfuerzos *residuales* sin que actúe carga alguna.

Capítulo 2

LOS MÉTODOS MATRICIALES DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

2.1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los computadores ha estimulado enormemente la investigación en muchas ramas de la ciencia permitiendo desarrollar procedimientos numéricos apropiados para el uso de los mismos. En el campo del análisis de estructuras, el ordenador ha conducido al desarrollo de métodos que utilizan las ideas del álgebra matricial.

La teoría matricial del análisis de estructuras aparece en la literatura técnica en la década de los 50. Tras una confusión inicial en el mundo de la ingeniería estructural práctica que oscureció en una primera etapa la relación existente entre el nuevo procedimiento y los métodos estructurales clásicos, el desarrollo del nuevo método sufrió un impulso tal, que al principio de la década de los 60 ya estaba perfectamente establecido.

Este impulso se debió a la confluencia de unas necesidades de cálculo, muchas veces tan complejas, que los métodos clásicos resultaban claramente insuficientes con el desarrollo y operatividad del ordenador.

El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras:

a) Permite desde el punto de vista teórico, utilizar métodos de cálculo de una forma más compacta, precisa y al mismo tiempo completamente general. Los principios fundamentales no se ven oscurecidos por las operaciones de cálculo o diferencias geométricas en las tipologías estructurales analizadas.

b) Proporciona en la práctica, un sistema adecuado de análisis y determina las bases idóneas para el desarrollo de programas de ordenador.

Sin embargo, los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático y su aplicación práctica pasa por su adecuación al ordenador que realiza el esfuerzo numérico. Su campo de aplicación está en estructuras grandes y complejas donde los métodos manuales convencionales requieren un esfuerzo humano excesivo. En problemas simples en los que los métodos manuales existentes son satisfactorios, se gana muy poco con un tratamiento matricial alternativo.

En los cálculos más complejos el ingeniero se encuentra con una amplia gama de posibles procedimientos clásicos alternativos de cálculo. La elección del más adecuado al problema a resolver, viene muchas veces condicionado por el grado de aproximación requerido y por su experiencia práctica y preferencias. Entre los distintos métodos que proporcionan una aproximación suficiente, el ingeniero debe tener en cuenta no sólo el trabajo numérico que cada uno lleva consigo sino también la facilidad con que pueden detectarse y corregirse los errores que se cometan.

Estos criterios clásicos deben revisarse al utilizar el computador, adquiriendo con su uso mucha más importancia, la *bondad* del método a utilizar y su facilidad de adaptación a la máquina (programación e implementación), independizando en gran medida, del número de operaciones a realizar y de cometer errores.

En este sentido, las operaciones del álgebra matricial son fácilmente programables en ordenador requiriendo únicamente un conocimiento de las bases del cálculo matricial y existiendo la posibilidad de recurrir a *rutinas* desarrolladas por especialistas que están, generalmente, incorporadas en el mismo.

Se puede afirmar que la introducción de los métodos matriciales en el cálculo de estructuras no implica la necesidad de grandes y difíciles conocimientos matemáticos ni exigen más principios estructurales que los elementales, tratados en todos los libros clásicos de texto utilizados con profusión en los métodos manuales de cálculo.

2.2. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Los métodos de análisis estructural a los que se van a aplicar las técnicas matriciales son aptos para estructuras en las que son válidos o se suponen válidos los principios fundamentales de la Mecánica de Estructuras (ver Capítulo 1), por tanto se basan en el cumplimiento de:

I. *Compatibilidad*. La deformación es una función continua y tiene un valor único en cada punto. En consecuencia, los movimientos también lo son, y en particular, los movimientos en los extremos de las piezas que concurren en un mismo nudo son idénticos para todas las piezas.

II. *Equilibrio*. Tanto la estructura globalmente como cada parte de la misma y, en particular, cada nudo y cada pieza de la misma están en equilibrio estático, bajo la acción de las fuerzas exteriores y de los esfuerzos internos.

III. *Linealidad y principio de superposición.* La estructura se comporta linealmente tanto a nivel local (relación tensión-deformación según la Ley de Hooke), como a nivel global (relaciones desplazamiento-deformación y fuerzas-tensiones, según la hipótesis de los pequeños movimientos). En virtud de esta linealidad, es válido el principio de superposición.

Los pasos necesarios para resolver una estructura mediante los métodos matriciales comienzan por definir la geometría de la estructura y las acciones, así como las condiciones de apoyo de la misma. La definición de la geometría debe hacerse de forma *digital* para que se pueda operar con ella fácilmente de manera algorítmica. La definición de las acciones debe ser general, de manera que se puedan considerar la enorme variedad de cargas y acciones que pueden solicitar la estructura. De igual manera, las condiciones de apoyo deben definirse de forma general. El proceso continúa con la identificación de las incógnitas, que serán movimientos incógnita de la estructura, si se aplica el Método de Rigidez, o fuerzas hiperestáticas, en el caso de aplicar el Método de Flexibilidad.

El esquema de resolución en el caso del Método de Rigidez (ver Figura 2.1) consiste en el proceso secuencial siguiente:

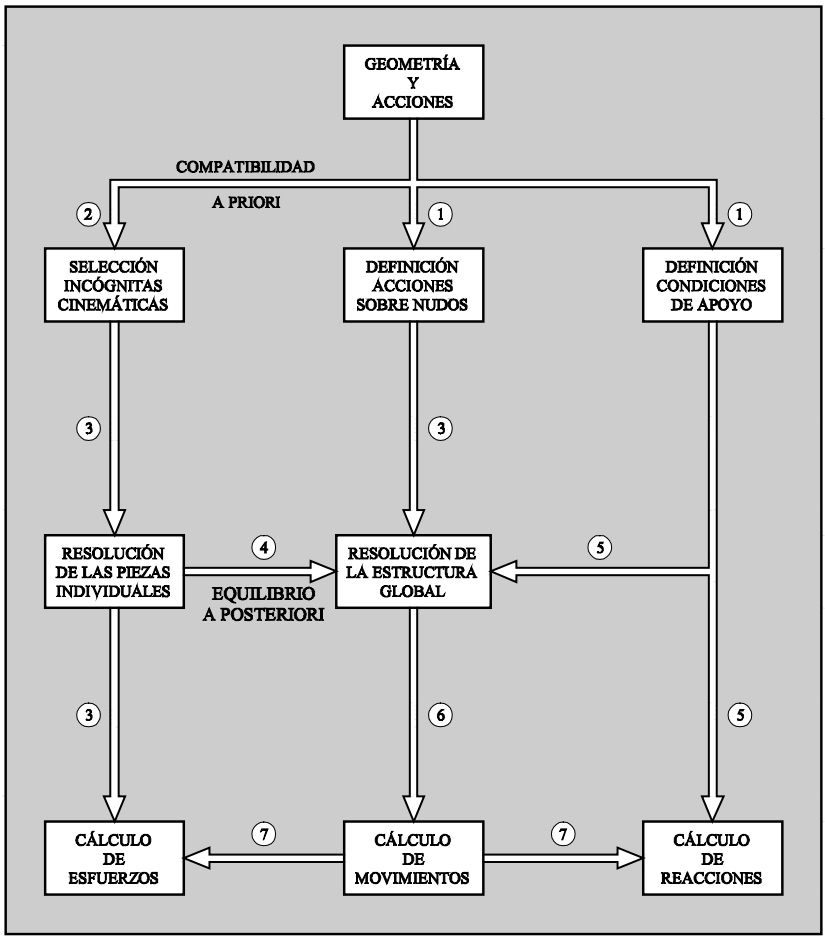


Figura 2.1: El método de equilibrio o de rigidez

1. definir la geometría de la estructura y las acciones, así como las condiciones de apoyo,
2. identificar el número de movimientos incógnitas que determinan la deformación de la estructura, teniendo en cuenta las correspondientes condiciones de compatibilidad en los nudos,
3. resolver las piezas individuales, en función de los movimientos de sus extremos, satisfaciendo las condiciones de equilibrio y compatibilidad de las piezas,

4. imponer las necesarias condiciones de equilibrio en los nudos,
5. imponer las condiciones de apoyo de la estructura,
6. determinar los movimientos incógnita resolviendo el sistema de ecuaciones resultante,
7. determinar los esfuerzos y las reacciones en la estructura.

La identificación de los movimientos incógnita de la estructura es trivial, ya que son todos los movimientos desconocidos de los nudos, es decir, el número de incógnitas cinemáticas de la estructura que es igual a:

$$k = gl \cdot nn - ca$$

donde *gl* es el número de grados de libertad a considerar por nudo, *nn* es el número de nudos en la estructura y *ca* es el número de grados de libertad prescritos por las condiciones de apoyo. En estructuras reticuladas de plano medio *gl* = 3, dos traslaciones en el plano de la estructura y un giro perpendicular a éste.

En articuladas planas *gl* = 2, dos traslaciones en el plano de la estructura y en emparrillados planos *gl* = 3, dos giros en el plano de la estructura y un desplazamiento perpendicular a éste.

En estructuras reticuladas espaciales *gl* = 6, tres traslaciones y tres giros y en articuladas espaciales *gl* = 3, tres traslaciones en el espacio.

En general no se desprecia la deformación por esfuerzo axil de las piezas, aunque sí suele despreciarse la deformación por cortante. Por tanto, las ecuaciones elásticas de las piezas deben incluir explícitamente los axiles y los movimientos longitudinales de los nudos de las piezas. A la forma matricial de las ecuaciones elásticas "completas" se le llama *matriz de rigidez* de la pieza.

Al tomar como incógnitas todos los movimientos de los nudos, es necesario plantear, de forma sistemática, ecuaciones de equilibrio de fuerzas y momentos en todos los nudos. A este proceso se le llama "*ensamblaje*" *de la matriz de rigidez global*.

Al imponer las condiciones de apoyo, se identifican los movimientos prescritos y sus correspondientes reacciones incógnitas.

Dado que el número de incógnitas del problema suele ser elevado, los sistemas de ecuaciones resultantes son grandes. Debe disponerse,

por tanto, de sistemas robustos y potentes para el almacenaje y la resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

En las siguientes secciones se tratan estos aspectos de forma detallada, comenzando por la forma en que debe definirse la geometría y las acciones sobre la estructura.

2.3 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA ESTRUCTURA

Una estructura genérica de piezas rectas se define mediante una serie de líneas rectas, que representan las directrices o ejes de las piezas, unidas unas a otras en puntos que representan los nudos. Al definir dicha estructura, de cara al análisis por ordenador, se utiliza la siguiente notación:

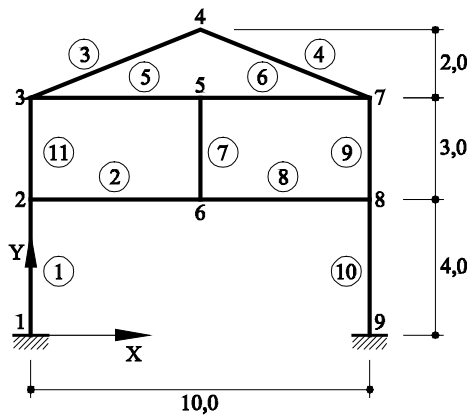
- Cada nudo se identifica por un número. El orden de numeración de los nudos es arbitrario, en principio, Más adelante se verá que esta numeración incide en el tamaño de la matriz de rigidez. La posición de los nudos se define dando las coordenadas de éstos referidas a un sistema global de referencia.
- Cada pieza de la estructura se identifica también por un número. El orden de numeración de las piezas es independiente del de los nudos y también arbitrario. En una pieza cualquiera *"k"* que une los nudos *"i"* y *"j"*, se llama extremo *"a"* al de menor numeración y extremo *"b"* al opuesto. Se adopta como sentido positivo de una pieza al definido por la secuencia $a \rightarrow b$.
- A cada pieza se le asigna un número que identifica el "material" de la pieza. El material de una pieza está definido por el conjunto de propiedades mecánicas (físicas y geométricas) que se precisan para caracterizar el comportamiento de ésta. En una estructura reticulada de plano medio, por ejemplo, es necesario definir el módulo de elasticidad del material *E*, el área *A* y el momento de inercia *I*, de la sección de la pieza.

Nótese que la definición geométrica de la estructura se compone de tres listas de números: (a) lista de nudos y sus coordenadas, (b) lista de piezas, con sus conectividades nodales, y (c) lista de "materiales" con la especificación de sus propiedades mecánicas (ver Figura 2.2). Esta forma sistemática de referir los nudos y las piezas permite la definición digital

de cualquier estructura. La definición digital es la única utilizable por el ordenador.

Además es necesario definir las condiciones de apoyo, esto se hace mediante otra lista en la que nudo a nudo, se especifican los grados de libertad libres y los restringidos. Cada grado de libertad no restringido es una incógnita cinemática del problema.

a)



b)

Nudo	X	Y	Barra	"a"	"b"	mat.	mat.	E	A	I
1	0,0	0,0	①	1	2	1	1	E_1	A_1	I_1
2	0,0	4,0	②	2	6	2	2	E_2	A_2	I_2
3	0,0	7,0	③	3	4	3	3	E_3	A_3	I_3
4	5,0	9,0	④	4	7	3				
5	5,0	7,0	⑤	3	5	2				
6	5,0	4,0	⑥	5	7	2				
7	10,0	7,0	⑦	5	6	1				
8	10,0	4,0	⑧	6	8	2				
9	10,0	0,0	⑨	7	8	1				
10			⑩	8	9	1				
11			⑪	2	3	1				

Figura 2.2: Definición geométrica de la estructura

Además, por cada grado de libertad *restringido* debe calcularse la correspondiente reacción incógnita.

2.4. SISTEMAS DE REFERENCIA (GLOBAL Y LOCAL)

Como se ha visto en la Sección anterior, para definir las coordenadas de los nudos se precisa un sistema de referencia. También se precisa de sistemas de referencia adecuados para referir los movimientos de los nudos (libres y prescritos) y las fuerzas actuantes sobre éstos. Por tanto, se definen:

- un *sistema global de referencia*, es decir, un triedro dextrógiro como los de las Figuras 2.2 y 2.3, al que nos referiremos como (*X,Y,Z*). Este sistema se usa para referir a él la geometría de la estructura, las fuerzas y los movimientos incógnita. El "ensamblaje" de las matrices y vectores de las piezas, en general, se hace en este sistema.
- Un *sistema local de referencia* para cada pieza. Este sistema es útil para escribir las ecuaciones elásticas de las piezas, ya que se simplifican al referirlas a sus ejes locales. Nos referiremos a él como (*x,y,z*). Se elige el eje *x* coincidente con la dirección y sentido positivo de la barra (del extremo "*a*" al "*b*") y los ejes *y,z* según los ejes principales de inercia de la sección transversal, tal como indica la Figura 2.3.
- En ciertos casos particulares, también es necesario definir sistemas locales de referencia de nudo. Es el caso de condiciones de contorno según ejes inclinados, más adelante se hablará de ello.

Se utiliza la notación **A**,**v** para las matrices y vectores expresados en el sistema global, y $\mathbf{A}', \mathbf{v}'$ para las matrices y vectores expresados en un sistema local. Dado que hay tantos sistemas locales como piezas, se necesitan matrices de cambio de base entre cada sistema local y el global.

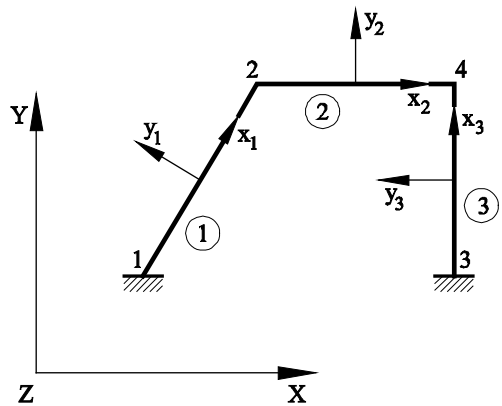


Figura 2.3: Sistemas de referencia global y locales de pieza

2.5. CARGAS ACTUANTES SOBRE LAS PIEZAS

Los casos de carga que pueden actuar sobre las piezas son muy variados. Es necesario disponer de una metodología que permita tratarlos con generalidad y que permita plantear el método de resolución haciendo abstracción de las particularidades del caso de carga considerado. El procedimiento que se describe a continuación, basado en el principio de superposición, permite lograr estos dos objetivos.

La estructura de la Figura 2.4, con cargas actuando sobre una o más piezas, puede descomponerse en dos estados de carga que se estudian por separado:

- El estado I consiste en el sistema de cargas real actuando sobre la estructura en la que se han impedido los movimientos de los nudos. A este estado se le llama "*empotramiento perfecto*" o "*intraslacional*", y bajo estas condiciones, cada pieza puede estudiarse por separado, determinándose las leyes de esfuerzos y las reacciones en los nudos.
- El estado II consiste en aplicar sobre la estructura real las reacciones en los nudos obtenidas en el estado anterior, cambiadas de signo. En este caso sólo se aplican cargas en los nudos.

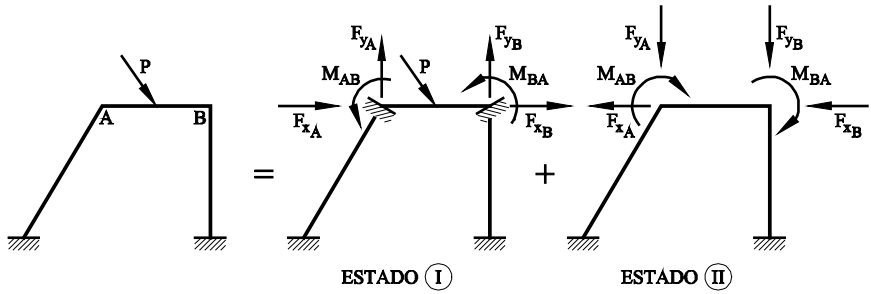


Figura 2.4: Tratamiento de las cargas actuantes sobre piezas

El estado I de empotramiento puede resolverse fácilmente utilizando procedimientos tradicionales. Por tanto, se supone que el cálculo matricial de estructuras se utiliza para resolver el estado II, es decir, que el cálculo matricial se aborda considerando únicamente fuerzas y momentos aplicados en los nudos de la estructura.

La suma de las cargas actuando en los estados I y II corresponde al estado de carga original de la estructura.

El resultado final, en movimientos y esfuerzos, según el principio de superposición, es igual a la suma de los resultados de los dos estados:

- Los movimientos de los nudos obtenidos en la resolución del estado II son los de la estructura real. Por definición, el estado I es intraslacional. La deformada de las piezas se obtiene por superposición de las deformadas de los dos estados.
- Las leyes de esfuerzos, y en particular, los esfuerzos en los extremos de las piezas se obtienen sumando los resultados de los dos estados. Las reacciones en los apoyos se obtienen a partir de los esfuerzos en los extremos de las piezas que concurren en los apoyos correspondientes.

Este procedimiento permite considerar, por ejemplo, casos de deformaciones impuestas sobre las piezas, tales como las deformaciones de origen térmico. Para ello, basta con resolver el caso intraslacional y calcular sus correspondientes reacciones. Luego se resuelve el estado II cargando la estructura real con estas reacciones cambiadas de signo.

Ejemplo 2.5.1

Resolver el pórtico de la Figura 2.5, sometido a las cargas que se indican, descomponiendo en suma de estados: I (empotramiento perfecto) y II (cargas en los nudos). Todas las piezas tienen las mismas propiedades mecánicas.

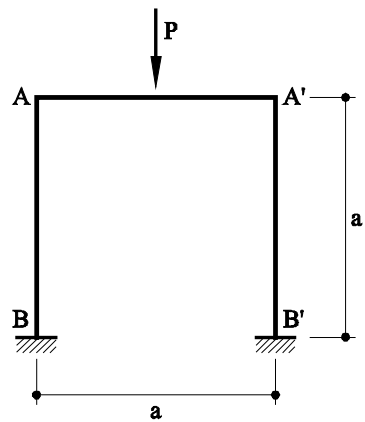


Figura 2.5: Pórtico del Ejemplo 2.5.1

Según lo planteado en esta Sección, se descompone el estado de carga indicado en suma de los estados siguientes (Figura 2.6):

- El estado I puede resolverse de forma analítica para obtener las reacciones

$$V = \frac{P}{2} \quad \text{y} \quad M = \frac{Pa}{8}$$

y, por ejemplo la ley de momentos flectores mostrada en la Figura 2.7.

- El estado II, con cargas sólo en los nudos, puede resolverse, por métodos analíticos o matriciales, para obtener, por ejemplo, la ley de flectores mostrada en la Figura 2.7.

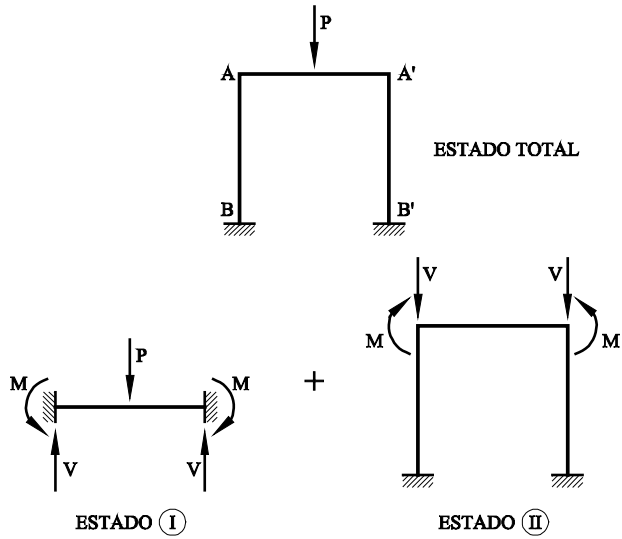


Figura 2.6: Sistemas de cargas en el Ejemplo 2.5.1

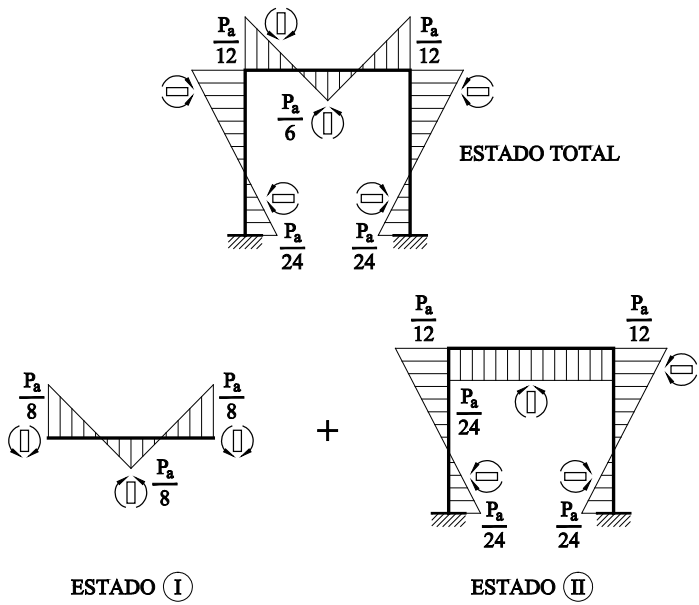


Figura 2.7: Leyes de flectores en el Ejemplo 2.5.1

Las leyes de flectores de la estructura se obtienen como suma de los dos estados I + II (ver Figura 2.7). Análogo procedimiento se sigue para las leyes de esfuerzos cortantes y axiles.

Puesto que los nudos tienen movimientos nulos en el estado I, los movimientos nodales totales son los del estado II. Las deformadas de las piezas se obtienen también por superposición de las deformadas de los estados I + II.

Ejemplo 2.5.2

Resolver el pórtico de la Figura 2.8, sometido a un incremento uniforme de temperatura Δt, descomponiendo en suma de estados: I (de empotramiento perfecto) y II (solo cargas en los nudos). Ttodas las piezas tienen las mismas propiedades mecánicas.

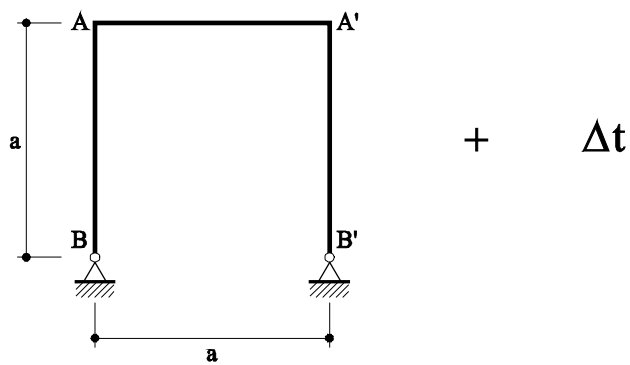


Figura 2.8: Pórtico del Ejemplo 2.5.2

Nuevamente se descompone el estado de carga del pórtico en suma de los estados siguientes (ver Figura 2.9):

- El *estado I* es fácil de resolver para obtener las reacciones $F = EA\alpha\Delta t$, que producen idéntico estado de compresión en todas las barras (ver Figura 2.9a), con *EA* igual a la rigidez a axil de la pieza y α es el coeficiente de dilatación térmica del material

- El *estado II*, con cargas en los nudos, puede resolverse por métodos analíticos o matriciales, para obtener, por ejemplo, la deformada y la ley de flectores mostradas en la Figura 2.10a y b. Se obtiene así que el valor M del flector en el dintel es:

$$M = \frac{3}{5+3\beta}\frac{EI}{a}\alpha\Delta t$$

donde $\beta = (I/Aa^2)$ representa la relación entre la rigidez a flexión y a axil de las piezas.

Puesto que los nudos tienen movimientos nulos en el *estado I*, los movimientos *nodales* totales son los del *estado II*. Por otra parte, en el caso de carga que se estudia no existen cargas directamente aplicadas en las barras, por tanto las deformadas de las piezas también son las del *estado II*.

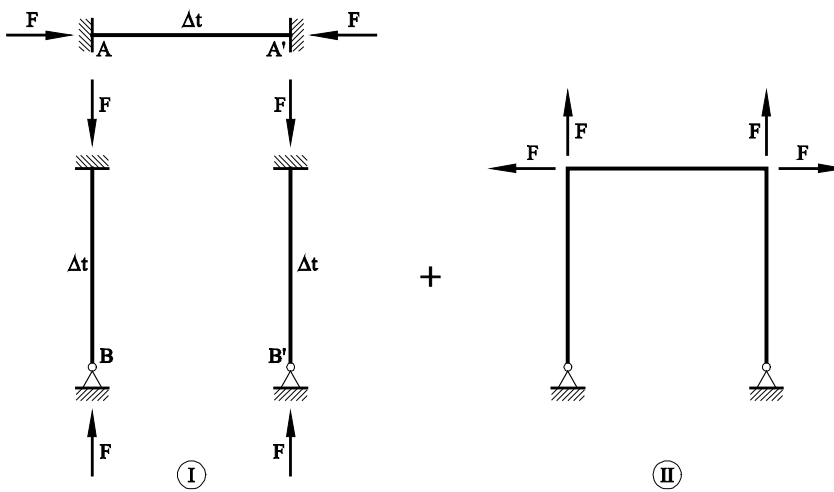


Figura 2.9: Sistemas de cargas en el Ejemplo 2.5.2

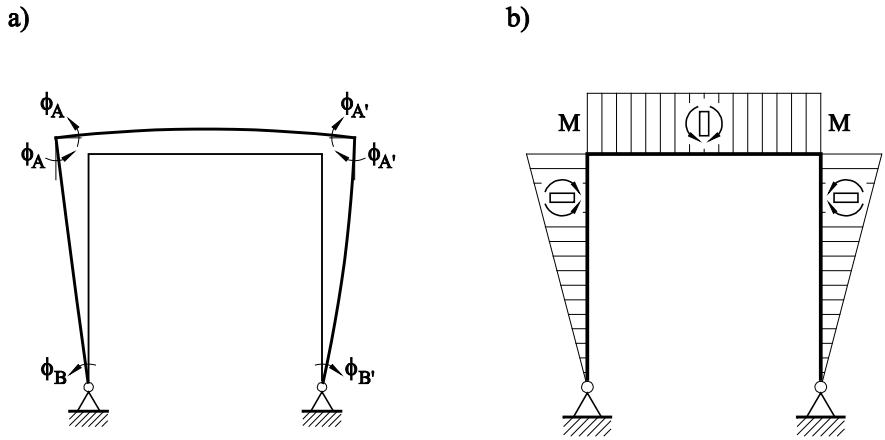


Figura 2.10: Deformada y ley de flectores del Ejemplo 2.5.2

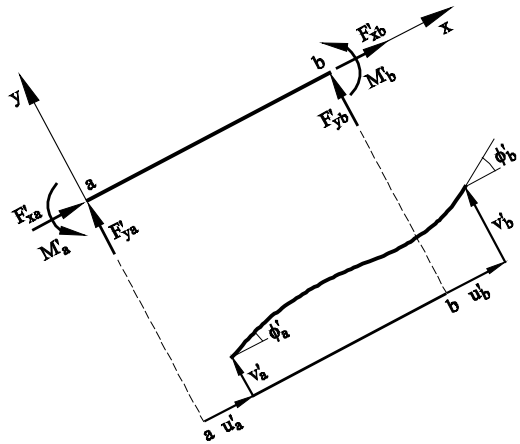
2.6. FORMA MATRICIAL DE LAS ECUACIONES ELÁSTICAS

Las ecuaciones elásticas de una pieza establecen la relación existente entre las fuerzas (y momentos) que actúan en los extremos de la pieza y los movimientos (desplazamientos y giros) que se producen en los mismos. Si se aísla una barra cualquiera de una estructura reticulada de plano medio, de longitud *l* y sección transversal constante, tal como muestra la Figura 2.11 y se consideran los esfuerzos que actúan sobre sus extremos *a* y *b*, y los movimientos de éstos, las ecuaciones de equilibrio, en el sistema local de referencia, son:

$$\begin{aligned} F'_{xa} + F'_{xb} &= 0 \\ F'_{ya} + F'_{yb} &= 0 \\ M'_a + M'_b + F'_{yb}\, l &= 0 \end{aligned} \qquad (2.1)$$

de donde:

$$F'_{xa} = -F'_{xb} \qquad F'_{ya} = -F'_{yb} = \frac{M'_a + M_b}{l} \qquad (2.2)$$



	FUERZAS		
a	F'_{xa}	F'_{ya}	M'_a
b	F'_{xb}	F'_{yb}	M'_b
	MOVIMIENTOS		
a	u'_a	v'_a	ϕ'_a
b	u'_b	v'_b	ϕ'_b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

Figura 2.11: Fuerzas y movimientos de extremo de pieza

Por otro lado, si la longitud inicial de la barra es *l*, después de la deformación por axil la longitud *l'* vendrá dada en función de los movimientos de sus extremos por $l' = l + (u'_b - u'_a)$, por tanto, la barra se alarga $u'_b - u'_a$ y en consecuencia el alargamiento de la barra por esfuerzo axil es:

$$u'_b - u'_a = \frac{F'_{xb} l}{EA} \tag{2.3}$$

Por tanto, las ecuaciones elásticas de los axiles en los extremos de la pieza son:

$$F'_{xa} = +\frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) \qquad F'_{xb} = -\frac{EA}{l}\left(u'_a - u'_b\right) \tag{2.4}$$

Las ecuaciones elásticas de los momentos en los extremos de la pieza [1], escritas en función de los giros y del desplazamiento transversal de éstos, despreciando la deformación por cortante, son:

$$\begin{aligned} M'_a &= \frac{4EI}{l}\phi'_a + \frac{2EI}{l}\phi'_b + \frac{6EI}{l^2}\left(v'_a - v'_b\right) \\ M'_b &= \frac{2EI}{l}\phi'_a + \frac{4EI}{l}\phi'_b + \frac{6EI}{l^2}\left(v'_a - v'_b\right) \end{aligned} \tag{2.5}$$

De las ecuaciones de equilibrio, se deducen fácilmente las ecuaciones elásticas de los esfuerzos cortantes en los extremos de las barras que son:

$$F'_{ya} = +\frac{6EI}{l^2}\phi'_a + \frac{6EI}{l^2}\phi'_b + \frac{12EI}{l^3}\left(v'_a - v'_b\right)$$
$$F'_{yb} = -\frac{6EI}{l^2}\phi'_a - \frac{6EI}{l^2}\phi'_b - \frac{12EI}{l^3}\left(v'_a - v'_b\right) \qquad (2.6)$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}'_a\\ \mathbf{f}'_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab}\\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}'_a\\ \mathbf{d}'_b\end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

donde los vectores:

$$\mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix}F'_{xa}\\ F'_{ya}\\ M'_a\end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix}F'_{xb}\\ F'_{yb}\\ M'_b\end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix}u'_a\\ v'_a\\ \varphi'_a\end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix}u'_b\\ v'_b\\ \varphi'_b\end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

y las matrices:

$$\mathbf{K}'_{aa} = \begin{bmatrix}+\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{ab} = \begin{bmatrix}-\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{ba} = \begin{bmatrix}-\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{bb} = \begin{bmatrix}+\frac{EA}{l} & 0 & 0\\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2}\\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l}\end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

En las expresiones anteriores, los vectores $\mathbf{d}'_a$ y $\mathbf{d}'_b$ están formados por las componentes de movimiento que definen la traslación y el giro del nudo en el sistema local de la pieza, por ello dichos vectores se llaman *vectores de movimiento de nudo*.

Los vectores $\mathbf{f}'_a$ y $\mathbf{f}'_b$ se llaman *vectores de esfuerzos en extremo de pieza* y como puede verse, están formados por las componentes de fuerzas y momentos que actúan en los extremos de la barra.

El número de componentes de cada uno de los vectores es igual al número de grados de libertad por nudo, en ejes locales. Este número varía según la tipología de la estructura analizada y en este caso es igual a 3 (barra de estructura reticulada de plano medio).

Nótese que las matrices $\mathbf{K}'_{aa}$ y $\mathbf{K}'_{bb}$ son simétricas y que $\mathbf{K}'_{ab} = \mathbf{K}'^{T}_{ba}$. Finalmente, puede llegarse a una ecuación matricial más compacta:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{2.10}$$

Al vector $\mathbf{f}'$ se le llama *vector de esfuerzos de la pieza* y a $\mathbf{d}'$ se le denomina *vector de movimientos de la pieza.* A la matriz $\mathbf{K}'$ se la llama *matriz de rigidez elemental.*

2.7 CONCEPTO DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD DE UNA PIEZA

Las ecuaciones elásticas de una pieza aislada como se ha visto en el apartado anterior, pueden escribirse, en la forma matricial compacta como:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}'$$

Por extensión del problema mecánico elemental del comportamiento de un muelle, donde *f=kd* (*fuerza= rigidez* x *movimiento*), se denomina a la matriz **K´**, *matriz de rigidez* de la pieza o matriz de rigidez elemental, y el método de cálculo que se basa en ella recibe el nombre de ***Método de rigidez***. La componente f'_i del vector de esfuerzos de la pieza será:

$$f'_i = \sum_{j=1}^{m} K'_{ij}\, d'_j \tag{2.11}$$

donde *m* es el número de grados de libertad de la pieza y K'_{ij} son las componentes de la matriz de rigidez elemental. Si se considera un sistema de movimientos en los extremos de la barra en el que únicamente la componente d'_j del vector movimientos es no nula e igual a la unidad, es decir:

$$d'_j = 1 \quad d'_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \qquad \text{resulta} \qquad (f'_i) = K'_{ij} \tag{2.12}$$

Obsérvese que la columna *j*-ésima de la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}'$ representa el vector de esfuerzos $(\mathbf{f}')^j$ que se producen en la pieza cuando se impone un movimiento $d'_j = 1.$

La relación entre fuerzas y movimientos en los extremos de la pieza también puede escribirse en la forma *movimiento = flexibilidad* x *fuerza*, donde la *flexibilidad* se define como inversa de la rigidez.

Sin embargo, mientras las fuerzas en los extremos están perfectamente definidas para cualquier conjunto de movimientos, la inversa no se cumple dado que la pieza puede sufrir un movimiento arbitrario de sólido rígido sin que se modifiquen las fuerzas que actúan en sus extremos. Matemáticamente esto quiere decir que la matriz de rigidez es singular y por tanto no existe su forma inversa en un sentido estricto.

Si se fija un extremo de la barra, por ejemplo, el "a", entonces $\mathbf{d}'_a = 0$ y de esta manera quedan impedidos así los movimientos de sólido rígido. En este caso, se tiene:

$$\mathbf{f}'_b = \mathbf{K}'_{bb}\, \mathbf{d}'_b \tag{2.13}$$

Esta relación sí puede invertirse y se tiene:

$$\mathbf{d}'_b = \mathbf{K}'^{-1}_{bb}\, \mathbf{f}'_b = \mathbf{F}'_{bb}\, \mathbf{f}'_b \tag{2.14}$$

donde a la matriz $\mathbf{F}'_{bb} = \mathbf{K}'^{-1}_{bb}$ se le denomina *matriz de flexibilidad*, y al método de cálculo matricial basado en ella ***Método de flexibilidad***.

Si se tiene en cuenta que la pieza analizada forma parte de una estructura estable y no de un mecanismo, sus movimientos de sólido rígido están físicamente impedidos, y la matriz de rigidez será siempre *no singular*. Por lo tanto, puede hallarse su inversa y escribirse la

relación entre los movimientos en los nudos y las fuerzas aplicadas en los extremos de la pieza. La componente d'_i del vector de movimientos de la pieza será:

$$d'_i = \sum_{j=1}^{n} F'_{ij}\ f'_j \tag{2.15}$$

donde *n* es el número de grados de libertad de la pieza (excluidos los movimientos de sólido rígido) y F'_{ij} son las componentes de la matriz de flexibilidad elemental. Si se considera un sistema de esfuerzos sobre la pieza en el que únicamente la componente del vector de esfuerzos f'_j es no nula e igual a la unidad, es decir:

$$f'_j = 1\ ,\quad f'_i = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j \quad \text{resulta} \qquad (d'_i) = F'_{ij} \tag{2.16}$$

Nótese que el coeficiente F'_{ij} de la matriz de flexibilidad representa la componente *i*-ésima del vector de movimientos $(\mathbf{d}')^j$ que se produce cuando actúa sobre la pieza un esfuerzo de componente f'_j unidad. Por el Teorema de los Trabajos Recíprocos (ver Ref. [1]) debe ser:

$$f'_i(=1)\cdot(d'_i)^j = f'_j(=1)\cdot(d'_j)^i \quad \Rightarrow \qquad F'_{ij} = F'_{ji} \tag{2.17}$$

Es decir, que la matriz de flexibilidad $\mathbf{F}'$ elemental es *simétrica*. Como consecuencia de la simetría de la matriz de flexibilidad elemental, se deduce que la matriz de rigidez elemental, que es su inversa, también lo es, como se ha comprobado para el caso de las estructuras reticuladas de plano medio.

2.8. TRANSFORMACIÓN DE SISTEMAS DE REFERENCIA

En todo lo anterior, se ha definido la relación entre fuerzas y movimientos en los extremos de la pieza (ecuaciones elásticas) en el *sistema local de referencia* y considerada la pieza aislada. A continuación, se trata la transformación de dichas ecuaciones al *sistema global de referencia* de la estructura a la que pertenece la barra. Por simplicidad, se analiza el caso de las estructuras de plano medio.

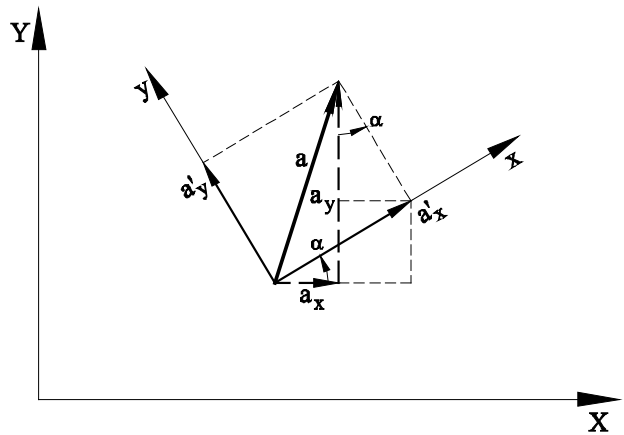


Figura 2.12. Transformación de sistemas de referencia

Sea α el ángulo que forman los ejes locales de la barra (*x,y*) con los ejes globales de la estructura (*X,Y*) (ver Figura 2.12). La transformación de un vector $\mathbf{a}'$, de componentes (a'_x, a'_y, a'_z) expresado en el sistema local, en el correspondiente vector **a,** de componentes (a_x, a_y, a_z) expresado en el sistema global, es:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

donde se observa que, en este caso, los ejes *z* y *Z* coinciden. En general, se puede escribir:

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}\,\mathbf{a}' \tag{2.19}$$

donde la matriz **T** de transformación es ortogonal por construcción; por esta razón, su matriz inversa coincide con su transpuesta $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$.

Por tanto, la transformación inversa (del sistema local al global) se puede escribir como:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}^T\,\mathbf{a} \tag{2.20}$$

2.9. ESFUERZOS SEGÚN EJES LOCALES

Aplicando la transformación de sistemas de referencia a los vectores de movimiento y de esfuerzos de extremo de pieza, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_a &= \mathbf{T}^T\ \mathbf{d}_a & \qquad \mathbf{d}'_b &= \mathbf{T}^T\ \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_a &= \mathbf{T}\ \mathbf{f}'_a & \qquad \mathbf{f}_b &= \mathbf{T}\ \mathbf{f}'_b \end{aligned} \tag{2.21}$$

Por consiguiente, partiendo de las ecuaciones elásticas referidas al sistema local de referencia:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{K}'_{aa}\ \mathbf{d}'_a + \mathbf{K}'_{ab}\ \mathbf{d}'_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{K}'_{ba}\ \mathbf{d}'_a + \mathbf{K}'_{bb}\ \mathbf{d}'_b \end{aligned} \tag{2.22}$$

y utilizando las relaciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{K}'_{aa}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{ab}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{K}'_{ba}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{bb}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{2.23}$$

Puede verse que estas ecuaciones elásticas permiten obtener los esfuerzos en el sistema local de referencia, a partir de los movimientos en el sistema global. Tal como se verá más adelante, estas expresiones son muy importantes puesto que en el método de rigidez, todo el problema de cálculo se reduce a determinar los movimientos de los nudos que estarán referidos el sistema global. Ahora bien, en el diseño de la estructura lo que realmente interesa son los esfuerzos locales en los extremos de las barras (axiles, flectores y cortantes) y estas últimas ecuaciones son las que permiten determinar matricialmente esos valores.

2.10. ECUACIONES ELÁSTICAS SEGÚN EJES GLOBALES

Si se premultiplica las ecuaciones (2.23) por la matriz de transformación de sistemas **T**, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a = \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{aa}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{ab}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{T}\,\mathbf{f}'_b = \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{ba}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{bb}\ \mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{2.24}$$

o bien, con $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{ij}\,\mathbf{T}^T$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{K}_{aa}\,\mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{ab}\,\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{K}_{ba}\,\mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{bb}\,\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{2.25}$$

Estas son las ecuaciones elásticas de la pieza expresadas en el sistema global de referencia, y son las que se utilizan para ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura, como se explicará en el capítulo siguiente.

En el caso de una estructura reticulada de plano medio, las matrices $\mathbf{K}_{ij}$, tras realizar las correspondientes operaciones matriciales tienen la expresión:

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} C^2\frac{EA}{l} + S^2\frac{12EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & -S\frac{6EI}{l^2} \\ & S^2\frac{EA}{l} + C^2\frac{12EI}{l^3} & C\frac{6EI}{l^2} \\ SIM. & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l} - S^2\frac{12EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & -S\frac{6EI}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{12EI}{l^3} & C\frac{6EI}{l^2} \\ S\frac{6EI}{l^2} & -C\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l} - S^2\frac{12EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & S\frac{6EI}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{12EI}{l^3} & -C\frac{6EI}{l^2} \\ -S\frac{6EI}{l^2} & C\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} C^2\frac{EA}{l} + S^2\frac{12EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{12EI}{l^3}\right) & S\frac{6EI}{l^2} \\ & S^2\frac{EA}{l} + C^2\frac{12EI}{l^3} & -C\frac{6EI}{l^2} \\ SIM. & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

con $S = \sin\alpha$ y $C = \cos\alpha$, siendo α el ángulo que forman los ejes locales (x,y) y los ejes globales (X,Y).

Nótese que las matrices y $\mathbf{K}_{aa}$ y $\mathbf{K}_{bb}$ son simétricas y que $\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T$, con lo que se comprueba que, tal como se demostró en el apartado 2.7, la matriz elemental de rigidez es simétrica *en cualquier sistema de referencia*.

Capítulo 3

EL MÉTODO DE RIGIDEZ

3.1. INTRODUCCIÓN

En el Capítulo 2 se han descrito, de forma general, las bases en las que se fundamentan los métodos matriciales en su aplicación al análisis de estructuras. Tanto los Métodos de Compatibilidad como los de Equilibrio pueden plantearse para su resolución automática, dando lugar a los Métodos de Flexibilidad y de Rigidez, respectivamente. Sin embargo, debe señalarse que los segundos tienen como ventaja sobre los primeros el que su formulación es más sistemática. En la práctica, los programas modernos de Cálculo de Estructuras se basan, en casi su totalidad, en el Método de Rigidez. En este Capítulo se muestra con detalle el proceso a seguir para resolver estructuras mediante dicho método, también llamado Método de Equilibrio, particularizando su aplicación al análisis de estructuras reticuladas de plano medio.

Los pasos necesarios para resolver una estructura según el Método de Rigidez comienzan con la definición de la geometría y las acciones sobre la estructura. Se identifican, a continuación, los movimientos incógnita teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad y se pasa a resolver las piezas individuales en función de los movimientos de sus extremos. El análisis continúa estableciendo las condiciones de equilibrio en la estructura, es decir, realizando el *ensamblaje* de las matrices elementales.

3.2. MATRIZ GLOBAL DE RIGIDEZ

Una vez calculadas las ecuaciones elásticas de todas las piezas que forman la estructura en un sistema de referencia común, el siguiente paso en el *método de rigidez* es la construcción de la matriz global de rigidez de la estructura. Esta matriz global se obtiene mediante el *ensamblaje* de las matrices elementales de rigidez de las piezas.

Dicho ensamblaje se realiza considerando el equilibrio de fuerzas (y momentos, en su caso) que actúan sobre cada nudo de la estructura; de ahí el nombre de *método de equilibrio* con el que también se denomina al presente método de cálculo.

A modo de ejemplo ilustrativo para explicar el proceso a seguir, considérese la estructura de la Figura 3.1 formada por 4 barras y 4 nudos con la numeración que se indica. Los vectores que representan las fuerzas exteriores (cargas en los nudos) y los sentidos de recorrido de las piezas pueden verse en la figura.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas interiores (esfuerzos en extremos de piezas) y exteriores que actúan sobre los nudos pueden escribirse, en el sistema global de referencia:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= (\mathbf{f}_a)_{12} + (\mathbf{f}_a)_{14} \\
&= (\mathbf{K}_{aa})_{12}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{12}\,\mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{aa})_{14}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{14}\,\mathbf{d}_4 \\
\mathbf{f}_2 &= (\mathbf{f}_b)_{12} + (\mathbf{f}_a)_{14} \\
&= (\mathbf{K}_{ba})_{12}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{bb})_{12}\,\mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{aa})_{24}\,\mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{ab})_{24}\,\mathbf{d}_4 \\
\mathbf{f}_3 &= (\mathbf{f}_a)_{34} \\
&= (\mathbf{K}_{aa})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34}\,\mathbf{d}_4 \\
\mathbf{f}_4 &= (\mathbf{f}_b)_{14} + (\mathbf{f}_b)_{24} + (\mathbf{f}_b)_{34} \\
&= (\mathbf{K}_{ba})_{14}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{bb})_{14}\,\mathbf{d}_4 + (\mathbf{K}_{ba})_{24}\,\mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{bb})_{24}\,\mathbf{d}_4 \\
&\qquad + (\mathbf{K}_{ba})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{bb})_{34}\,\mathbf{d}_4
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Estas ecuaciones pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{14} & (\mathbf{K}_{ab})_{12} & 0 & (\mathbf{K}_{ab})_{14} \\ (\mathbf{K}_{ba})_{12} & (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{24} & 0 & (\mathbf{K}_{ab})_{24} \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{aa})_{34} & (\mathbf{K}_{ab})_{34} \\ (\mathbf{K}_{ba})_{14} & (\mathbf{K}_{ba})_{24} & (\mathbf{K}_{ba})_{34} & (\mathbf{K}_{bb})_{14} + (\mathbf{K}_{bb})_{24} + (\mathbf{K}_{bb})_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

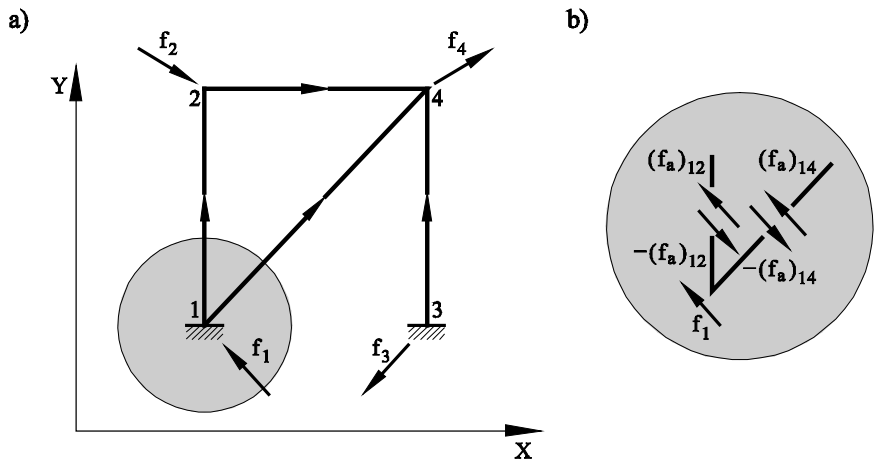


Figura 3.1: Estructura y equilibrio de fuerzas en un nudo

o de forma más compacta:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\,\mathbf{d} \quad (3.3)$$

donde **f** es el vector global de las fuerzas exteriores (incluidas las reacciones), **K** es la matriz global de rigidez de la estructura y **d** es el vector global de movimientos en los nudos. De lo anterior se obtienen algunas conclusiones de validez general:

a) La matriz **K** es *simétrica*, al serlo las matrices $\mathbf{K}_{aa}$ y $\mathbf{K}_{bb}$ elementales y traspuestas una de la otra las matrices $\mathbf{K}_{ab}$ y $\mathbf{K}_{ba}$ de cada pieza.

b) La matriz de rigidez **K** es *singular*, ya que las ecuaciones de equilibrio no se ven afectadas por un movimiento de sólido rígido de la estructura.

c) El sistema de ecuaciones (3.3) tiene solución, a pesar de ser **K** singular, ya que $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_4$, $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_3$ son conocidos, siendo $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{d}_2$ y $\mathbf{d}_4$ las incógnitas. Los vectores $\mathbf{d}_1$ y $\mathbf{d}_3$ son conocidos por ser justamente los movimientos prescritos por las condiciones de apoyo de la estructura. Estas condiciones de apoyo impiden los movimientos de sólido rígido de la estructura y matemáticamente, evitan la singularidad de la matriz **K**, haciendo el problema resoluble en $\mathbf{d}_2$ y $\mathbf{d}_4$. En la Sección 3.XX se detallan los pasos a seguir.

3.2.1. Algoritmos de ensamblaje de la matriz global de rigidez

Al ser la matriz global de rigidez **K** siempre simétrica, sólo es necesario considerar el almacenamiento y el ensamblaje de los términos de la diagonal principal y los situados por encima (o por debajo) de ella, es decir, el triángulo superior (o el inferior) de la matriz de la estructura. Dicho triángulo superior puede ensamblarse siguiendo dos algoritmos alternativos:

a) **Nudo a nudo**. Se ensambla el grupo de ecuaciones correspondientes a cada nudo, considerando éstos, uno a uno de forma consecutiva. Esto equivale a ensamblar la matriz global "fila a fila" siguiendo las siguientes reglas (ver la matriz de la ecuación 3.2):

- El elemento de la diagonal principal de la fila *i*-ésima es la suma de las matrices $\mathbf{K}_{aa}$ ó $\mathbf{K}_{bb}$ de todas las piezas que concurren al nudo *i*. Se toma $\mathbf{K}_{aa}$ si la pieza tiene su extremo *a* en el nudo *i* y la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ si es el extremo *b* el que coincide con el nudo *i*.
- Los demás elementos de la fila *i*-ésima, correspondientes a las columnas $j \geq i$, son las matrices $\mathbf{K}_{ab}$ de las piezas que unen el nudo *i* con los nudos *j*, respectivamente. Si no existe la pieza *ij,* el elemento a ensamblar es una matriz nula **0**. Debido a la simetría de la matriz, sólo es necesario considerar las piezas cuyo extremo de numeración menor es el nudo *i*.

b) **Pieza a Pieza.** Se ensamblan las submatrices elementales correspondientes a cada pieza, considerando éstas una a una, de forma consecutiva. Esto equivale a ensamblar la matriz de rigidez de la barra *ij* (que une el nudo *i* con el nudo *j*, *i<j*), en las siguientes posiciones de la matriz global (ver la matriz de la ecuación 3.2).

		Columna *i*		Columna *j*	
Fila *i*	.....	$(\mathbf{K}_{aa})_{ij}$	.....	$(\mathbf{K}_{ab})_{ij}$	.....
Fila *j*	.....	$(\mathbf{K}_{ba})_{ij}$	.....	$(\mathbf{K}_{bb})_{ij}$	.....

El algoritmo b), ensamblaje pieza a pieza, tiene la ventaja de que cada una de las piezas sólo es considerada una vez; esto permite calcular las matrices elementales una a una, antes de ensamblarlas, eliminando la necesidad de almacenarlas. Esta ventaja es importante en problemas de gran tamaño.

3.2.2 Optimización de la numeración de nudos

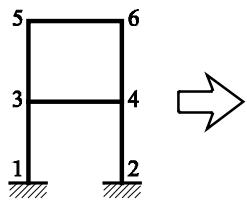
Observando el proceso de formación de la matriz de rigidez, se deduce fácilmente que su forma varía con la numeración elegida para los nudos. Por tanto, aunque en principio se dijo que la numeración de los nudos podía ser arbitraria, lo cierto es que incide de manera directa en la eficacia y rapidez del análisis.

Se llama *ancho de banda* de la matriz global (*bw*) a la mayor diferencia de numeración existente entre los nudos extremos *ij* de las piezas de la estructura.

$$bw = \max_{j>i} \left(j - i\right) \qquad \forall \text{ pieza } ij \tag{3.4}$$

Es obvio que la numeración óptima es la que corresponde al ancho de banda menor. Cuanto menor sea la diferencia de numeración entre los extremos de una barra, más estrecha será la banda de la matriz, es decir, más agrupados se encontrarán los términos no nulos y menor será el número de operaciones necesarias para el cálculo, resultando el análisis más eficiente.

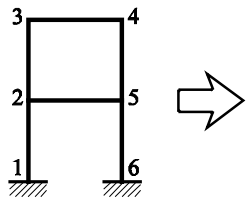
a)



Ancho de banda : $4-2=2$

1	2	3	4	5	6	
$(K_{aa})_{13}$	0	$(K_{ab})_{13}$	0	0	0	1
	$(K_{aa})_{24}$	0	$(K_{ab})_{24}$	0	0	2
		$(K_{bb})_{13}+(K_{aa})_{34}+(K_{aa})_{35}$	$(K_{ab})_{34}$	$(K_{ab})_{35}$	0	3
			$(K_{bb})_{24}+(K_{bb})_{34}+(K_{aa})_{46}$	0	$(K_{ab})_{46}$	4
	SIMÉTRICA			$(K_{bb})_{35}+(K_{aa})_{56}$	$(K_{ab})_{56}$	5
					$(K_{bb})_{46}+(K_{bb})_{56}$	6

b)



Ancho de banda : $5-2=3$

1	2	3	4	5	6	
$(K_{aa})_{12}$	$(K_{ab})_{12}$	0	0	0	0	1
	$(K_{bb})_{12}+(K_{aa})_{23}+(K_{aa})_{25}$	$(K_{ab})_{23}$	0	$(K_{ab})_{25}$	0	2
		$(K_{bb})_{23}+(K_{aa})_{34}$	$(K_{ab})_{34}$	0	0	3
			$(K_{bb})_{34}+(K_{aa})_{45}$	$(K_{ab})_{45}$	0	4
	SIMÉTRICA			$(K_{bb})_{25}+(K_{bb})_{45}+(K_{aa})_{54}$	$(K_{ab})_{56}$	5
					$(K_{bb})_{56}$	6

Figura 3.2: Numeración de nudos y estructura de la matriz global

Si se considera, por ejemplo, la estructura de la Figura 3.2, adoptando la numeración que se muestra en la Figura 3.2a, se obtiene un ancho de banda *bw*=2, y la matriz global correspondiente. Por el contrario, si se adopta la numeración de la Figura 3.2b, se tiene un ancho de banda *bw*=3 y la matriz global mostrada en la figura. Nótese que la numeración óptima es la primera, ya que proporciona el menor ancho de banda posible.

Si tenemos en cuenta que en la mayoría de las estructuras cada nudo tan solo está unido a los *próximos*, debe cuidarse especialmente de utilizar un método sistemático de numeración de forma que la diferencia entre los números asociados a los nudos de una barra sea pequeña en relación con el número total de nudos.

Esto provocará que la mayoría de los elementos no nulos de la matriz de rigidez esté cerca de la diagonal principal. Las matrices que tienen esa propiedad se denominan *matrices en banda.*

De lo anterior se concluye que la numeración de los nudos de una estructura es un aspecto importante de cara a la eficacia del cálculo y por esta razón los programas de cálculo suelen disponer de *algoritmos de renumeración* de los nudos de la estructura para minimizar las necesidades de almacenaje.

3.3. CONDICIONES DE APOYO

La especificación de las condiciones apoyo de la estructura se traduce en que algunos de los grados de libertad de ésta tienen sus valores prescritos. El número de grados de libertad prescritos debe ser el suficiente para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura.

3.3.1. Movimientos prescritos según los ejes globales

De forma general, consideremos que el grado de libertad i-ésimo de la estructura, referido a los ejes globales de referencia, tiene un valor prescrito $d_i = \overline{d}_i$ (Figura 3.3). El sistema de ecuaciones a resolver es:

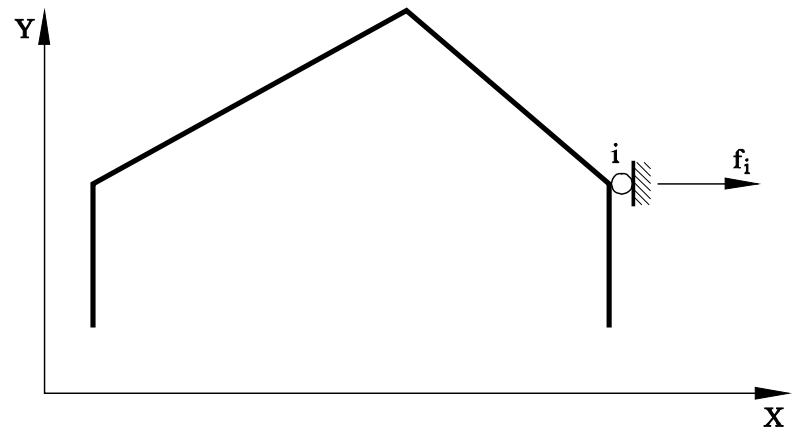


Figura 3.3: Grado de libertad prescrito en el nudo i

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ \overline{d}_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

donde f_i es la reacción correspondiente al grado de libertad prescrito. Es posible pasar los términos conocidos ($K_{ji}\overline{d}_i$) al término de la derecha y modificar la columna i-ésima, para dejar el sistema de ecuaciones en la forma:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & 0 & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & 0 & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & 0 & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ \overline{d}_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} - \overline{d}_i \begin{bmatrix} K_{1i} \\ \dots \\ K_{ii} \\ \dots \\ K_{ni} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Nótese que ahora se puede eliminar la fila y la columna i-ésimas, reduciendo así el tamaño del sistema global en una ecuación. Este proceso se repite para cada grado de libertad prescrito, lo cual reduce, consecuentemente el número de ecuaciones a resolver.

En la práctica, la matriz de rigidez se dimensiona, calcula y almacena en su formato final. Los términos K_{ij} se ensamblan en la matriz sólo si el grado de libertad i está libre; en caso contrario, se añaden los términos –

d_i K_{ij} al vector de fuerzas. En el caso particular, en que el grado libertad esté prescrito a un valor nulo, d_i=0 (ver Figura 3.3), esta última operación es innecesaria.

3.3.2. Movimientos prescritos según los ejes locales

Las condiciones de contorno no siempre están prescritas según los ejes globales; sino según otros ejes locales que podrían llamarse "de nudo".

Por ejemplo, en la Figura 3.4, el nudo 2 tiene prescrito el movimiento $v_2' = 0$ según el eje y´ del sistema local del nudo 2. La ecuación matricial global de la estructura (en ejes globales), en este caso es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

donde ya se han realizado los ensamblajes correspondientes, por ejemplo:

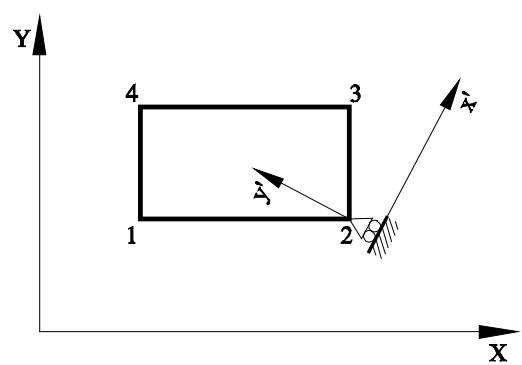


Figura 3.4: Grado de libertad prescrito según ejes locales de nudo

$$\mathbf{K}_{22} = (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23} \tag{3.8}$$

Como las condiciones de apoyo del nudo 2 están referidas a los ejes locales (x', y'), es necesario transformar las ecuaciones correspondientes a dicho nudo al sistema local del nudo 2.

Utilizando las transformaciones:

$$\mathbf{f}_2 = \hat{\mathbf{T}}\,\mathbf{f}'_2 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{d}_2 = \hat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}'_2 \tag{3.9}$$

donde $\hat{\mathbf{T}}$ es la matriz de transformación del sistema (x', y') al sistema global (X,Y), se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \hat{\mathbf{T}}\mathbf{d}'_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \hat{\mathbf{T}}\,\mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Premultiplicando la segunda ecuación por $\hat{\mathbf{T}}^{-1} = \hat{\mathbf{T}}^T$ y reordenando, queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12}\hat{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{14} \\ \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{21} & \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{22}\hat{\mathbf{T}} & \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}\hat{\mathbf{T}} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}'_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}'_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Nótese en primer lugar que la matriz resultante es simétrica, además las fuerzas aplicadas al nudo 2 deben referirse al sistema local del nudo 2 y por último que los movimientos del nudo 2 se obtienen en dicho sistema local.

La primera ecuación expresa el equilibrio del nudo 1, referido al sistema global, y resulta:

$$\mathbf{K}_{11}\,\mathbf{d}_1 + \mathbf{K}_{12}\hat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}'_2 + \mathbf{K}_{14}\,\mathbf{d}_4 = \mathbf{f}_1 \tag{3.12}$$

La segunda ecuación expresa el equilibrio del nudo 2, referido al sistema local del nudo 2:

$$\hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{21}\,\mathbf{d}_1 + \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{22}\hat{\mathbf{T}}\,\mathbf{d}'_2 + \hat{\mathbf{T}}^T\mathbf{K}_{23}\,\mathbf{d}_3 = \mathbf{f}'_2 \tag{3.13}$$

y sobre esta ecuación se pueden imponer directamente las condiciones de contorno de la forma señalada en el apartado precedente.

3.3.3. Apoyos elásticos

Los apoyos elásticos tienen la particularidad de deformarse de forma proporcional (lineal) a las reacciones o esfuerzos que actúan sobre ellos y su tratamiento en el método de rigidez es particularmente sencillo. Considérese de forma general que el grado de libertad *i*-ésimo está vinculado a un apoyo elástico que tienen como ecuación elástica:

$$r_i = -k_i \, d_i \tag{3.14}$$

En la que r_i es la reacción correspondiente, k_i es la constante elástica del apoyo y d_i es el grado de libertad incógnita (Figura 3.5). El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i - k_i \, d_i \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

donde f_i es la fuerza exterior actuante sobre el grado de libertad *i*. Puede trasladarse el término $-k_i \, d_i$, de valor desconocido, al miembro de la izquierda, resultando:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + k_i & \dots & K_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_i \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Puede verse que los apoyos elásticos se introducen sin más que añadir su rigidez al término de la diagonal correspondiente a la ecuación en cuestión.

Esto equivale a considerar el apoyo como un elemento resistente más de la estructura y “ensamblar” de forma apropiada su contribución.

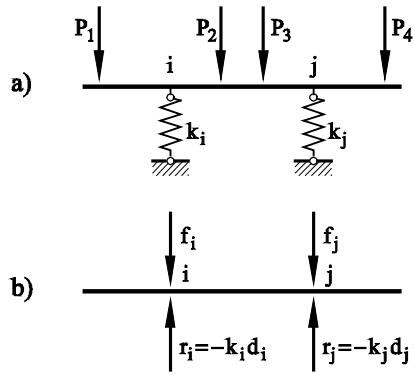


Figura 3.5: Apoyos elásticos

3.4. CÁLCULO DE MOVIMIENTOS, ESFUERZOS Y REACCIONES

3.4.1. Cálculo de los movimientos en los nudos

La ecuación matricial, referida al sistema global planteada en el método de rigidez, puede ser resuelta cuando están perfectamente definidas las condiciones de contorno, fuerzas actuantes en los nudos y movimientos finales en la sustentación. Es decir, partiendo del sistema de ecuaciones de equilibrio en los nudos:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{d} = \mathbf{f} \tag{3.17}$$

y modificado éste para introducir las condiciones de contorno, se tiene el sistema de ecuaciones reducido:

$$\hat{\mathbf{K}}\,\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{f}} \tag{3.18}$$

donde se han eliminado los grados de libertad prescritos. Si las condiciones de apoyo son suficientes para impedir los movimientos de sólido rígido de la estructura, la matriz modificada $\hat{\mathbf{K}}$ es no singular y el sistema reducido puede resolverse. Los movimientos incógnita en los nudos se obtienen resolviendo:

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{K}}^{-1}\,\hat{\mathbf{f}} \tag{3.19}$$

Ahora puede considerarse resuelto el problema estructural y se pueden calcular las reacciones y los esfuerzos en las piezas.

3.4.2. Cálculo de las reacciones

Las reacciones en los nudos con movimientos impedidos o prescritos se calculan a partir del sistema original de ecuaciones, una vez conocidos los movimientos incógnita del problema. Supóngase el grado de libertad prescrito *i*, la reacción correspondiente se calcula utilizando la ecuación *i-ésima* del sistema original de ecuaciones de equilibrio, es decir:

$$f_i = \sum_j K_{ij}\, d_j \tag{3.20}$$

O bien, calculando pieza a pieza y sumando los correspondientes esfuerzos en los extremos de las *k* piezas que concurren al nudo que tiene el movimiento prescrito:

$$f_i = \sum_k \left(f_{ij}\right)_k \tag{3.21}$$

siendo *k* las piezas que concurren en el nudo impedido *i* (Figura 3.6).

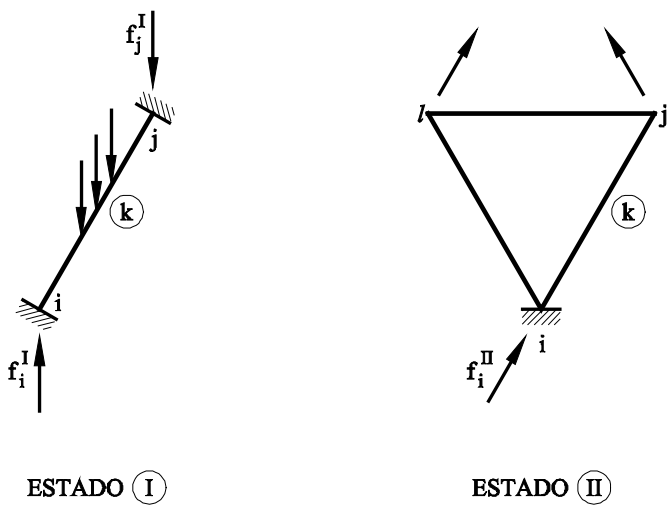


Figura 3.6: Cálculo de reacciones

Si las piezas que concurren en el nudo coartado tienen cargas actuando sobre ellas, se añaden las reacciones del estado I de empotramiento perfecto. En ese caso, la reacción total es:

$$f_i = f_i^I + \sum_k \left(f_{ij}\right)_k^{II} \tag{3.22}$$

3.4.3. Cálculo de esfuerzos en extremo de barra

Conocidos los movimientos de los nudos $\mathbf{d}_i$, principal incógnita del problema, se pueden determinar matricialmente los esfuerzos en los extremos de las barras (esfuerzo axil, flector, cortante y torsor). Estos esfuerzos conviene expresarlos en el sistema coordenado local para obtener directamente las leyes de esfuerzos en las barras.

En general, estos esfuerzos son la suma de los que proporciona el estado perfectamente empotrado (I) y de los que corresponden al estado de las cargas en los nudos (II), estos últimos obtenidos directamente por el cálculo matricial.

Como se conocen las relaciones que ligan los esfuerzos en extremo de barra en coordenadas locales y los movimientos globales de los mismos, en los extremos *a* y *b* de una pieza *ij* (ecuaciones (2.23), se puede escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \left(\mathbf{f}'_a\right)^I + \left(\mathbf{f}'_a\right)^{II} = \left(\mathbf{f}'_a\right)^I + \mathbf{K}'_{aa}\,\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{ab}\,\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b &= \left(\mathbf{f}'_b\right)^I + \left(\mathbf{f}'_b\right)^{II} = \left(\mathbf{f}'_b\right)^I + \mathbf{K}'_{ba}\,\mathbf{T}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{bb}\,\mathbf{T}^T\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde $\left(\mathbf{f}'_a\right)^I$ y $\left(\mathbf{f}'_b\right)^I$ son los esfuerzos de empotramiento perfecto (en locales), $\left(\mathbf{f}'_a\right)^{II}$ y $\left(\mathbf{f}'_b\right)^{II}$ son los esfuerzos del estado de cargas en los nudos (en locales), $\mathbf{d}_a$ y $\mathbf{d}_b$ son los movimientos (en globales) de los extremos de la pieza, $\mathbf{K}'_{aa}$, $\mathbf{K}'_{ab}$, $\mathbf{K}'_{ba}$, $\mathbf{K}'_{bb}$ son las matrices componentes de la matriz de rigidez elemental de la barra *ij* (en locales) y **T** es la matriz de transformación de coordenadas local-global para la pieza *ij*.

3.5. ARTICULACIONES

3.5.1. Articulaciones internas

Todos los desarrollos anteriores han supuesto que las uniones entre las piezas (nudos o enlaces) de la estructura reticulada de plano medio son rígidas, es decir, impiden todo movimiento relativo entre las piezas que concurren al nudo.

Supóngase ahora el caso en que una pieza esté unida a un nudo de la estructura mediante una articulación (ver Figura 3.7). Las ecuaciones elásticas de la barra serán las correspondientes a la barra empotrado-articulada, en la que el extremo *b* sea el articulado y puede escribirse:

$$\begin{aligned} M'_a &= \frac{3EI}{l}\phi'_a + \frac{3EI}{l^2}\left(v'_a - v'_b\right) \\ M'_b &= 0 \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Además por equilibrio de cortantes y momentos:

$$F'_{ya} = -F'_{yb} = \frac{M'_a}{l} \qquad (3.25)$$

Por tanto, las ecuaciones elásticas de los esfuerzos cortantes en los extremos de la pieza son iguales a:

$$\begin{aligned} F'_{ya} &= +\frac{3EI}{l^2}\phi'_a + \frac{3EI}{l^3}\left(v'_a - v'_b\right) \\ F'_{yb} &= -\frac{3EI}{l^2}\phi'_a - \frac{3EI}{l^3}\left(v'_a - v'_b\right) \end{aligned} \qquad (3.26)$$

Las relaciones (3.24) y (3.26) más las correspondientes al axil (2.4) en forma matricial pueden escribirse:

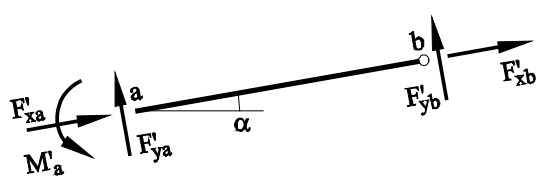


Figura 3.7: Barra con su extremo "b" articulado

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \\ F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \phi'_a \\ u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

que en forma más compacta resulta en:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{*'}_{aa} & \mathbf{K}^{*'}_{ab} \\ \mathbf{K}^{*'}_{ba} & \mathbf{K}^{*'}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

o bien:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}^{*'}\,\mathbf{d}' \tag{3.29}$$

Para pasar estas expresiones a las correspondientes en ejes globales, basta multiplicar adecuadamente por las matrices de cambio de coordenadas del sistema local al global y viceversa, **T** y $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{K}^{*}_{ij} = \mathbf{T}\,\mathbf{K}^{*'}_{ij}\,\mathbf{T}^{T} \qquad \text{con} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

donde *S*= sin α y *C*= cos α. Luego, las matrices globales de una pieza con una articulación en su extremo b toman la siguiente forma:

$$\mathbf{K}^{*}_{aa} = \begin{bmatrix} +C^2\frac{EA}{l}+S^2\frac{3EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & -S\frac{3EI}{l^2} \\ SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & S^2\frac{EA}{l}+C^2\frac{3EI}{l^3} & C\frac{3EI}{l^2} \\ -S\frac{3EI}{l^2} & C\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

$$\mathbf{K}^{*}_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l}-S^2\frac{3EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & 0 \\ -SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l}-C^2\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ S\frac{3EI}{l^2} & -C\frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{K}^{*}_{ba} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l}-S^2\frac{3EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & S\frac{3EI}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l}-C^2\frac{3EI}{l^3} & -C\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\mathbf{K}^{*}_{bb} = \begin{bmatrix} C^2\frac{EA}{l}+S^2\frac{3EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & 0 \\ SC\left(\frac{EA}{l}-\frac{3EI}{l^3}\right) & S^2\frac{EA}{l}-C^2\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Obsérvese que también en este caso, las matrices $\mathbf{K}^{*}_{aa}$ y $\mathbf{K}^{*}_{bb}$ son simétricas, y que $\mathbf{K}^{*}_{ab}$ y $\mathbf{K}^{*}_{ba}$ son transpuestas.

De forma análoga, se pueden obtener las matrices de rigidez $\mathbf{K}^{*'}$ para el caso en que la pieza estuviera articulada el extremo a (Figura 3.8):

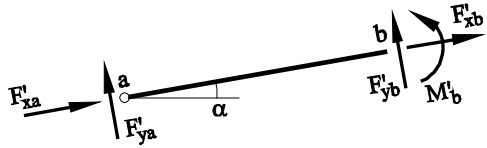


Figura 3.8: Barra con su extremo "a" articulado

$$\mathbf{K}^{*'} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

y sus expresiones en globales:

$$\mathbf{K}^{*}_{aa} = \begin{bmatrix} +C^2\frac{EA}{l} + S^2\frac{3EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & 0 \\ SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & S^2\frac{EA}{l} + C^2\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

$$\mathbf{K}^{*}_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l} - S^2\frac{3EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & -S\frac{3EI}{l^2} \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{3EI}{l^3} & C\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

$$\mathbf{K}^*_{ba} = \begin{bmatrix} -C^2\frac{EA}{l} - S^2\frac{3EI}{l^3} & -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & 0 \\ -SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & -S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ -S\frac{3EI}{l^2} & C\frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

$$\mathbf{K}^*_{bb} = \begin{bmatrix} C^2\frac{EA}{l} + S^2\frac{3EI}{l^3} & SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & S\frac{3EI}{l^2} \\ SC\left(\frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3}\right) & S^2\frac{EA}{l} - C^2\frac{3EI}{l^3} & -C\frac{3EI}{l^2} \\ S\frac{3EI}{l^2} & -C\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Nuevamente puede verse que las matrices $\mathbf{K}^*_{aa}$ y $\mathbf{K}^*_{bb}$ son simétricas, y que $\mathbf{K}^*_{ab}$ y $\mathbf{K}^*_{ba}$ son transpuestas.

Por consiguiente, una barra con el giro libre en un extremo que forma parte de un nudo rígido, se trata y ensambla en la matriz de rigidez total como cualquier otra barra, pero utilizando las submatrices de rigidez modificadas $\mathbf{K}^*$, teniendo en cuenta algunas cuestiones importantes:

- Para piezas con articulación, las cargas sobre la pieza se pasan a cargas en los nudos calculando las reacciones en la pieza en el estado I (nudos fijos) considerando la barra empotrado-articulada. En la estructura de la Figura 3.9, por ejemplo, el nudo 3 es rígido para las piezas 13 y 34; para ellas se utilizan las matrices de rigidez $\mathbf{K}_{ij}$ sin modificar. Asimismo, para pasar las cargas a los nudos en las piezas 13 y 34 se consideran las piezas con los extremos empotrados. Por el contrario, para la barra 23, el nudo 3 es articulado y para dicha pieza se utilizan las matrices de rigidez modificadas $\mathbf{K}^*_{ij}$ y para pasar las cargas a los nudos se resuelve la pieza como empotrado-articulada.

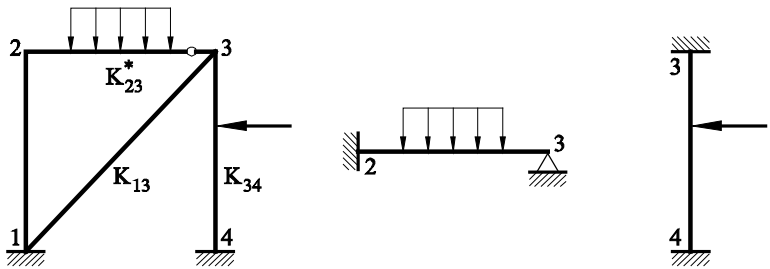


Figura 3.9: Estructura con pieza articulada y estados de empotramiento perfecto

- Si una pieza presenta una articulación intermedia, se toma la articulación como nudo, se divide la pieza en dos y *una de ellas* se considera articulada al nuevo nudo (ver Figura 3.10).

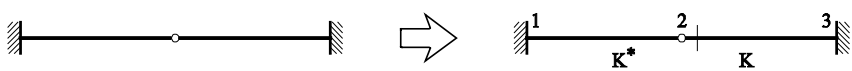


Figura 3.10: Pieza con articulación intermedia

- Si en nudo concurren varias piezas unidas todas ellas por una articulación debe considerarse una de las piezas, elegida arbitrariamente, como rígidamente unida al nudo (ver Figura 3.11). En caso contrario, el giro de dicho nudo queda indeterminado, y la matriz resultantes es *singular*

- Si una pieza está articulada en los dos extremos (por ejemplo, un tirante), todos los términos de su matriz de rigidez son nulos, salvos los debidos al esfuerzo axil (*EA/l*). En este caso se usa la matriz de rigidez elemental $\mathbf{K}^{**}$.

A partir de esta situación, son fácilmente deducibles las matrices de rigidez de las estructuras articuladas (ver Sección 4.4).

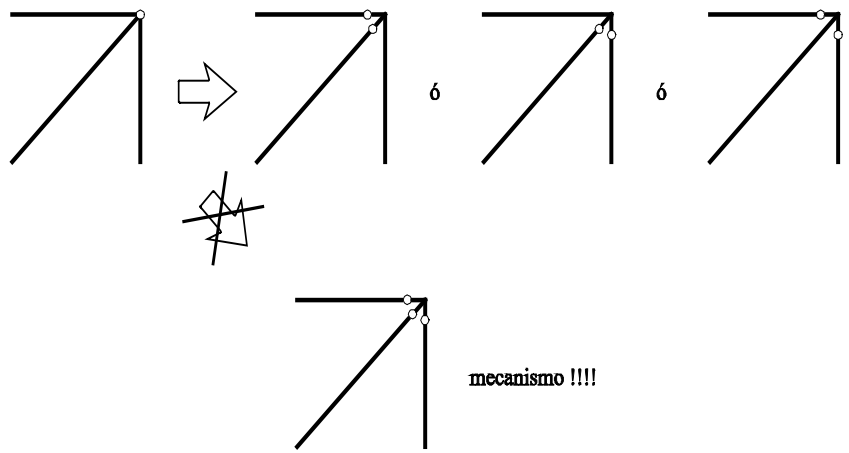


Figura 3.11: Tratamiento de un nudo articulado

3.5.2. Articulaciones en la sustentación

Si una pieza está articulada en la sustentación, el apoyo articulado se trata como una condición de apoyo y no se utilizan las matrices $\mathbf{K}^*$ modificadas de la Sección anterior. Si se utilizaran, la matriz global resultaría singular, salvo que se eliminase la ecuación correspondiente al giro de la articulación.

Sin embargo, cuando hay dos o más elementos unidos entre sí en una rótula de apoyo, es necesario tener un mayor cuidado, ya que pueden darse dos casos:

i) *nudo rígido,* es decir, que las barras articuladas estén rígidamente unidas entre sí en la articulación, (ver figura 3.12a). En la deformación no existe giro relativo entre las piezas. En este caso. la articulación constituye un elemento de apoyo único y, por lo tanto, se utilizan las matrices de rigidez **K** no modificadas y sobre la matriz de rigidez ensamblada se ponen las condiciones de contorno correspondientes al apoyo articulado (u_j=v_j=0).

ii) *nudo articulado*, es decir, que puede existir giro relativo entre las piezas (ver Figura 3.12b). En este caso, se considera el nudo como dos (o más) nudos ficticios distintos con diferente numeración (ver figura 3.12c), utilizando las matrices de rigidez **K** no modificadas e imponiendo las condiciones de contorno

correspondientes en los dos (o más) nudos ficticios (u_j=u_k=...=0 y v_j=v_k=...=0). La solución del problema proporciona los giros ϕ_j ,ϕ_k ,....., independientes y distintos, en todas las barras.

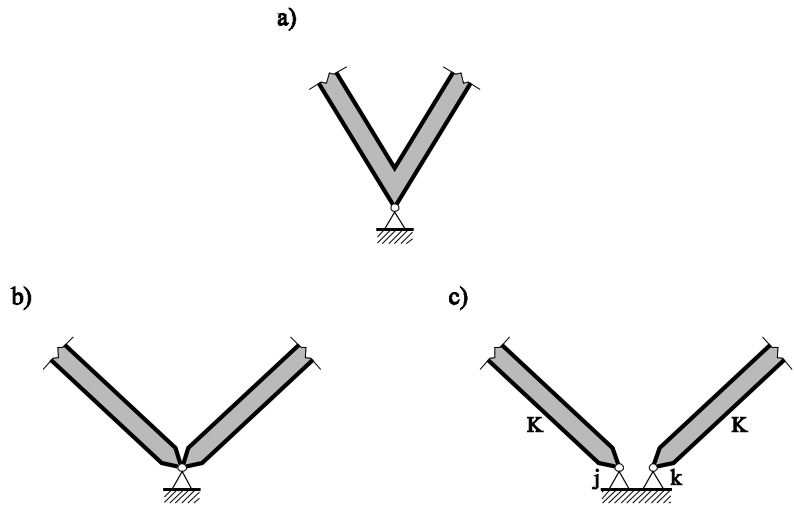


Figura 3.12: Articulación en la sustentación

3.6. EJEMPLOS

A continuación se resuelven, a modo de ejemplo, algunos pórticos planos mediante el método de rigidez. La potencia del método es imposible mostrarla al aplicarlo a estructuras sencillas, pero sí que se consigue mostrar su generalidad, a la vez que se ilustran algunos de los procedimientos descritos en este Capítulo.

Ejemplo 3.6.1

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 3.13a bajo una carga *p* uniformemente repartida en el dintel. La rigidez a flexión de las barras *EI* es constante.
Datos: *a* = 3 m, *b* = 5 m, *c* = 4 m, *p* = 120 kN/m, *EI* = $2\cdot10^7$ kN·m^2, *EA*=10^7 kN.

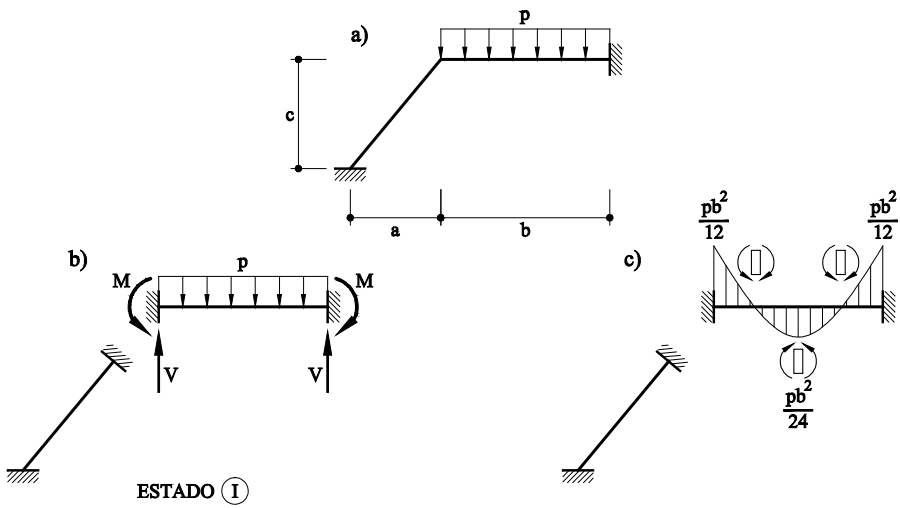


Figura 3.13:Pórtico del Ejemplo 3.6.1 Estado I: reacciones y ley de momentos flectores

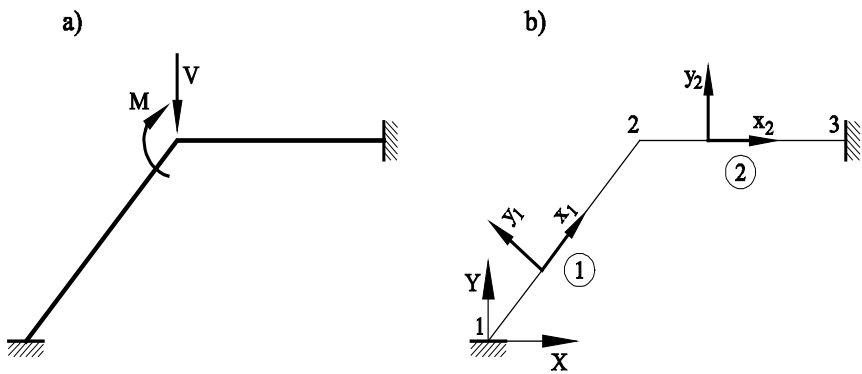


Figura 3.14:Estado II y sistemas locales y global de referencia del Ejemplo 3.6.1

De acuerdo a lo explicado en la Sección 2.5 del Capítulo 2, la estructura puede estudiarse descomponiendo el estado de carga en suma de dos estados.

- El *estado I*, intraslacional, permite obtener las reacciones de empotramiento perfecto en el dintel (Figura 3.13b), debidas a la carga uniformemente repartida:

$$V = \frac{pb}{2} = 300 \text{ kN} \qquad \text{y} \qquad M = \frac{pb^2}{12} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- El *estado II* con sólo cargas en los nudos de valor *V* y *M* cambiadas de signo (Figura 3.14a), se resuelve por el Método de Rigidez. La numeración de los nudos y de las barras, así como los sistemas de referencia locales y global pueden verse en la Figura 3.14b.

Se calculan, a continuación, las matrices de rigidez de las piezas en ejes locales. En este caso, las propiedades mecánicas de las barras son idénticas y, por tanto, estas matrices de rigidez son iguales para todas ellas y de valor:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 & -\mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & -\mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{D} & 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{E} \\ -\mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{B} & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{B} & -\mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{E} & 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

donde:
A= $EA / l = 200 \cdot 10^4$, B = $12EI / l^3 = 1{,}92 \cdot 10^4$, C = $6EI / l^2 = 4{,}80 \cdot 10^4$,
D= $4\, EI / l = 16 \cdot 10^4$ y E = $2EI / l = 8 \cdot 10^4$.

Las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta las expresiones (2.26)-(2.29) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas ($\alpha_{12} = 53{,}13^\circ$, $\alpha_{23} = 0^\circ$), son:

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 & -A_1 & -B_1 & -C_1 \\ B_1 & D_1 & E_1 & -B_1 & -D_1 & E_1 \\ -C_1 & E_1 & D & C_1 & -E_1 & E \\ -A_1 & -B_1 & C_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ -B_1 & -D_1 & -E_1 & B_1 & D_1 & -E_1 \\ -C_1 & E_1 & E & C_1 & -E_1 & D \end{bmatrix}$$

donde: $A_1 = 0{,}36A + 0{,}64B = 73{,}2 \cdot 10^4$ $B_1 = 0{,}48(A - B) = 95{,}1 \cdot 10^4$

$C_1 = 0{,}8C = 3{,}84 \cdot 10^4$ $D_1 = 0{,}64A + 0{,}36B = 129 \cdot 10^4$

$E_1 = 0{,}6C = 2{,}88 \cdot 10^4$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & C & 0 & -B & C \\ 0 & C & D & 0 & -C & E \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -C & 0 & B & -C \\ 0 & C & E & 0 & -C & D \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene siguiendo el proceso de ensamblaje descrito en la Sección 3.2, y es igual a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{12} & (\mathbf{K}_{ab})_{12} & 0 \\ (\mathbf{K}_{ba})_{12} & (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23} & (\mathbf{K}_{ab})_{23} \\ 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{23} & (\mathbf{K}_{bb})_{23} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores adecuados resulta la matriz global siguiente, en la que:

$F = A + A_1 = 273{,}2 \cdot 10^4$ $G = B + D_1 = 130{,}92 \cdot 10^4$ $H = C - E_1 = 1{,}92 \cdot 10^4$

$I = 2D = 32 \cdot 10^4$

Las letras restantes tienen significado idéntico al utilizado en las matrices anteriores.

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 & -A_1 & -B_1 & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & D_1 & E_1 & -B_1 & -D_1 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & E_1 & D & C_1 & -E_1 & E & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & -B_1 & C_1 & F & B_1 & C_1 & -A & 0 & 0 \\ -B_1 & -D_1 & -E_1 & B_1 & G & H & 0 & -B & C \\ -C_1 & E_1 & E & C_1 & H & I & 0 & -C & E \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B & -C & 0 & B & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & E & 0 & -C & D \end{bmatrix}$$

Puede observarse que la matriz de rigidez global de la estructura es una matriz en banda y simétrica.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, es decir, empotramiento en los nudos 1 y 3, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1,2,3 y 7,8,9), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 273,2 & 95,1 & 3,84 \\ 95,1 & 130,92 & 1,92 \\ 3,84 & 1,92 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -300 \\ -250 \end{bmatrix}$$

El término de la derecha del sistema anterior corresponde al caso de cargas considerado, en el que la fuerza *V* y el momento *M*, actuantes sobre el nudo 2, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia.

La solución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados al nudo 2, que corresponden a los grados de libertad 4, 5 y 6. Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,16 \\ -3,03 \\ -7,77 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde, los desplazamientos se miden en metros y los ángulos en radianes. Los sentidos de estos movimientos vienen dados por los correspondientes signos, referidos al sistema global de referencia.

Conocidos los movimientos incógnita, el paso siguiente es calcular las reacciones en los nudos con movimientos prescritos. Para ello, se recupera el sistema completo de ecuaciones y se calculan las fuerzas incógnitas en los grados de libertad prescritos. A modo de ejemplo, se calcula la reacción horizontal en el nudo 1, aplicando la ecuación (3.21), puede escribirse:

$$F_{x1} = (F_{x1})^I + \sum_{j=1}^{9} K_{1j}\, d_j = -\,\mathrm{A}_1\, u_2 - \mathrm{B}_1\, v_2 - \mathrm{C}_1\, \phi_2 = 233\,\mathrm{kN} \qquad (\rightarrow)$$

Nótese que en este caso, al estar la barra 1 libre de carga, el término que corresponde a la reacción de empotramiento perfecto (estado I) de la barra es nulo. Siguiendo el mismo procedimiento se obtienen las reacciones restantes:

$$\textit{Estado I:}\ \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \\ -250 \end{bmatrix} \quad + \quad \textit{Estado II:}\ \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233 \\ 257 \\ -49 \\ -233 \\ 43 \\ -77 \end{bmatrix} =$$

$$\textit{Final}\ \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233 \\ 257 \\ -49 \\ -233 \\ 343 \\ -327 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Los esfuerzos en los extremos de las barras en el estado II, se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.23) del Capítulo 2. Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo *a* de la barra 12 $(\alpha_{12} = 53{,}13^{\circ})$, son:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{12}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}&0&0\\0&\mathrm{B}&\mathrm{C}\\0&\mathrm{C}&\mathrm{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}6&0{,}8&0\\-0{,}8&0{,}6&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\\phi_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\mathrm{A}&0&0\\0&-\mathrm{B}&\mathrm{C}\\0&-\mathrm{C}&\mathrm{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}6&0{,}8&0\\-0{,}8&0{,}6&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\v_2\\\phi_2\end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{12}=\begin{bmatrix}F'_{x1}\\F'_{y1}\\M'_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}6\mathrm{A}u_2-0{,}8\mathrm{A}v_2\\0{,}8\mathrm{B}u_2-0{,}6\mathrm{B}\,v_2+\mathrm{C}\phi_2\\0{,}8\mathrm{C}u_2-0{,}6\mathrm{C}\,v_2+\mathrm{E}\phi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}345\\-35\\-49\end{bmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras correspondientes al estado II:

$$\left[\mathbf{f}'_{12}\right]=\begin{bmatrix}F'_{x1}\\F'_{y1}\\M'_1\\F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}345\\-32\\-49\\-345\\32\\-111\end{bmatrix}\quad;\quad\left[\mathbf{f}'_{23}\right]=\begin{bmatrix}F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\\F'_{x3}\\F'_{y3}\\M'_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}233\\-43\\-139\\-233\\43\\-77\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Superponiendo los dos estados (I + II) y teniendo en cuenta, que en el estado I (empotramiento perfecto) los esfuerzos en la barra 12 son nulos, al no existir carga en la barra, se obtienen los valores finales de los esfuerzos en los extremos de las barras:

$$\left[\mathbf{f}'_{12}\right]=\begin{bmatrix}F'_{x1}\\F'_{y1}\\M'_1\\F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}345\\-32\\-49\\-345\\32\\-111\end{bmatrix}\quad;\quad\left[\mathbf{f}'_{23}\right]=\begin{bmatrix}F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\\F'_{x3}\\F'_{y3}\\M'_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}233\\257\\111\\-233\\343\\-327\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Las leyes de esfuerzos y la deformada se muestran la Figura 3.15.

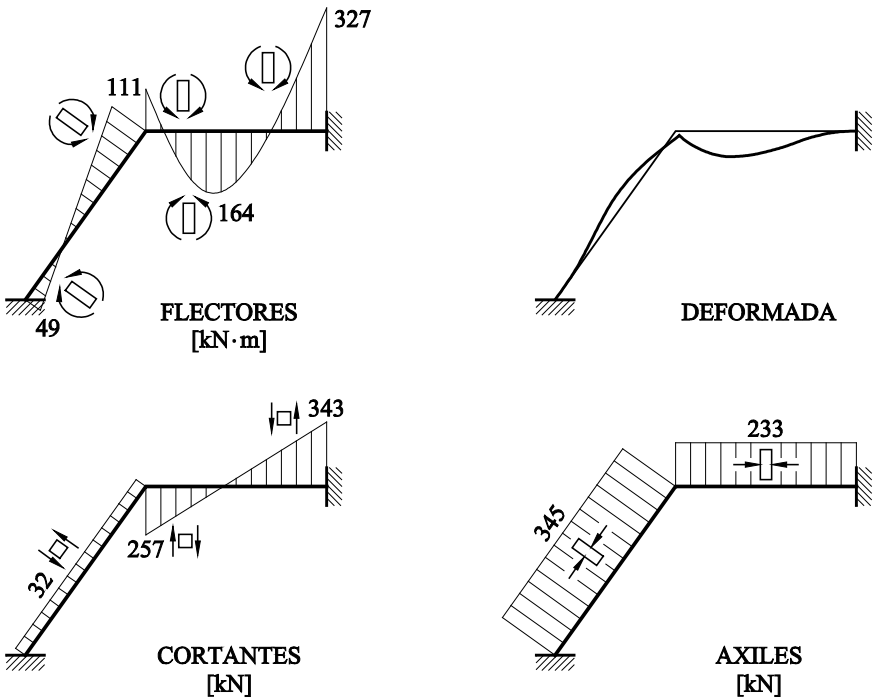


Figura 3.15: Leyes de esfuerzos del pórtico del Ejemplo 3.6.1

Ejemplo 3.6.2

Resolver la estructura de la Figura 3.16 aplicando el Método de Rigidez, para los valores a=5 m, $EI = 2 \cdot 10^5$ kN·m^2, $EA=10^7$ kN y H= 20 kN. Calcular los valores de V y M según el estado II del Ejemplo 2.5.1 (Capítulo2), es decir, para que correspondan a una carga puntual centrada en el dintel de valor P= 40 kN.

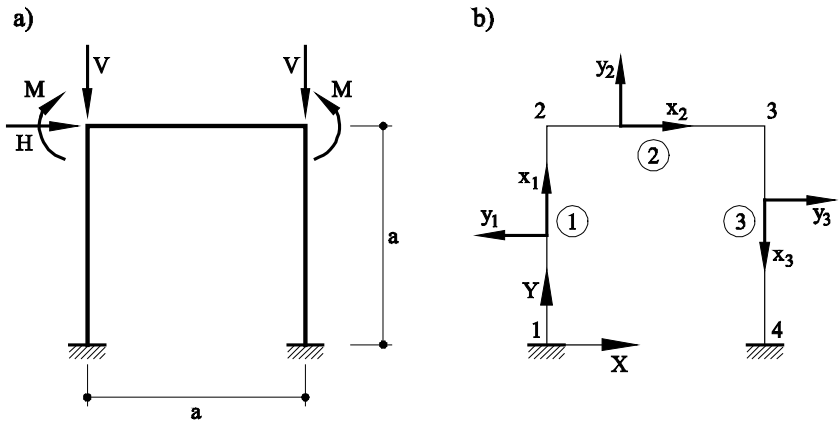


Figura 3.16: Pórtico del Ejemplo 3.6.2

Según se explicó en el Ejemplo 2.5.1, los valores de las fuerzas y momentos *V* y *M* que actúan sobre los nudos son iguales (cambiados de sentido) a las reacciones del correspondiente estado intraslacional; para la carga puntual aplicada en el centro del dintel, se tiene:

$$V = P/2 = 20 \text{ kN} \quad \text{y} \quad M = Pa/8 = 25 \text{ kN·m}.$$

La resolución de la estructura comienza por la numeración de los nudos y de las barras. La numeración elegida, así como los correspondientes ejes de referencia locales y global de la estructura se muestran en la Figura 3.16b.

Se calculan a continuación las matrices de rigidez de las piezas en ejes locales. En este caso, las propiedades de las barras son idénticas, por tanto, estas matrices de rigidez son iguales para todas ellas y de valor:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & B & C & 0 & -B & C \\ 0 & C & D & 0 & -C & E \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -B & -C & 0 & B & -C \\ 0 & C & E & 0 & -C & D \end{bmatrix}$$

donde:

$$\mathrm{A} = EA/a = 200\cdot 10^4 \quad \mathrm{B} = 12EI/a^3 = 1{,}92\cdot 10^4 \quad \mathrm{C} = 6EI/a^2 = 4{,}80\cdot 10^4$$

$$\mathrm{D} = 4EI/a = 16\cdot 10^4 \quad \mathrm{E} = 2EI/a = 8\cdot 10^4$$

Las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta las expresiones (2.26)-(2.29) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas ($\alpha_{12} = 90^o$, $\alpha_{23} = 0^o$, $\alpha_{34} = 270^o$), son:

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & 0 & -\mathrm{C} & -\mathrm{B} & 0 & -\mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{A} & 0 & 0 & -\mathrm{A} & 0 \\ -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{D} & \mathrm{C} & 0 & \mathrm{E} \\ -\mathrm{B} & 0 & \mathrm{C} & \mathrm{B} & 0 & \mathrm{C} \\ 0 & -\mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{A} & 0 \\ -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{E} & \mathrm{C} & 0 & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{23} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 & -\mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & \mathrm{C} & 0 & -\mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{D} & 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{E} \\ -\mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{B} & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{B} & -\mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{E} & 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} \mathrm{B} & 0 & \mathrm{C} & -\mathrm{B} & 0 & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{A} & 0 & 0 & -\mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{C} & 0 & \mathrm{D} & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{E} \\ -\mathrm{B} & 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{B} & 0 & -\mathrm{C} \\ 0 & -\mathrm{A} & 0 & 0 & \mathrm{A} & 0 \\ \mathrm{C} & 0 & \mathrm{E} & -\mathrm{C} & 0 & \mathrm{D} \end{bmatrix}$$

Puede observarse que, en este caso, las matrices en ejes globales son idénticas a las matrices **K´** en ejes locales, salvo permutaciones de filas y columnas.

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene realizando el proceso de ensamblaje, descrito en la Sección 3.2, y es igual a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{12} & (\mathbf{K}_{ab})_{12} & 0 & 0 \\ (\mathbf{K}_{ba})_{12} & (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23} & (\mathbf{K}_{ab})_{23} & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{23} & (\mathbf{K}_{bb})_{23} + (\mathbf{K}_{aa})_{34} & (\mathbf{K}_{ab})_{34} \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{34} & (\mathbf{K}_{bb})_{34} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores adecuados, resulta la matriz global:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} B & 0 & -C & -B & 0 & -C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & D & C & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B & 0 & C & F & 0 & C & -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 & F & C & 0 & -B & C & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & E & C & C & G & 0 & -C & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & F & 0 & C & -B & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B & -C & 0 & F & -C & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & E & C & -C & G & -C & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & -C & B & 0 & -C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & E & -C & 0 & D \end{bmatrix}$$

donde F = A + B = $201{,}92 \cdot 10^4$, G = 2D = $32 \cdot 10^4$; las letras restantes tienen el mismo significado utilizado en las matrices anteriores. Puede observarse claramente que la matriz de rigidez global de la estructura es una matriz en banda y simétrica.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, es decir empotramiento en los nudos 1 y 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1,2,3 y 10,11,12), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^4\begin{bmatrix} 201{,}92 & 0 & 4{,}80 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 201{,}92 & 4{,}80 & 0 & -1{,}92 & 4{,}80 \\ 4{,}80 & 4{,}80 & 32 & 0 & -4{,}80 & 8 \\ -200 & 0 & 0 & 201{,}92 & 0 & 4{,}80 \\ 0 & -1{,}92 & -4{,}80 & 0 & 201{,}92 & -4{,}80 \\ 0 & 4{,}80 & 8 & 4{,}80 & -4{,}80 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -20 \\ -25 \\ 0 \\ -20 \\ 25 \end{bmatrix}$$

El término de la derecha del sistema anterior corresponde al caso de cargas considerado, en el que las fuerzas *H* y *V* y los momentos actuantes *M* sobre los nudos 2 y 3, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia

La solución del sistema de ecuaciones permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados a los nudos 2 y 3, que corresponden a los grados de libertad 4,5,6 y 7,8,9, respectivamente. Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}51 \\ -0{,}05{,}73 \\ -1{,}96 \\ 7{,}44 \\ -0{,}143 \\ 0{,}142 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudo 1 y 4). Por ejemplo, aplicando la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción horizontal en el nudo 1, puede escribirse:

$$F_{x1} = (F_{x1})^I + \sum_{j=1}^{12} K_{1j}\, d_j = -\,\mathrm{B}\, u_2 - \mathrm{C}\, \phi_2 = 5\ \mathrm{kN} \qquad (\leftarrow)$$

Nótese que al existir sólo cargas en los nudos, el término que corresponde a la reacción de empotramiento es nulo. Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 11{,}5 \\ 20{,}4 \\ \text{-}15 \\ 28{,}5 \\ 36{,}8 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2. Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo *a* de la barra 12 $(\alpha_{12} = 90^o)$, son:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{12} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{-}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{12} = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ M'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{A}v_2 \\ \mathrm{B}\,u_2 + \mathrm{C}\phi_2 \\ \mathrm{C}\,u_2 + \mathrm{E}\phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11{,}5 \\ 5 \\ 20{,}4 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras:

$$\left[\mathbf{f}'_{12}\right] = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ M'_1 \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ M'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11{,}5 \\ 5 \\ 20{,}4 \\ -11{,}5 \\ -5 \\ 4{,}76 \end{bmatrix}; \left[\mathbf{f}'_{23}\right] = \begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ M'_2 \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -8{,}6 \\ -29{,}8 \\ -15 \\ 8{,}6 \\ -13 \end{bmatrix}; \left[\mathbf{f}'_{34}\right] = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_3 \\ F'_{x4} \\ F'_{y4} \\ M'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28{,}5 \\ 15 \\ 38 \\ -28{,}5 \\ -15 \\ 36{,}8 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Las leyes de esfuerzos y la deformada se muestran en la Figura 3.17.

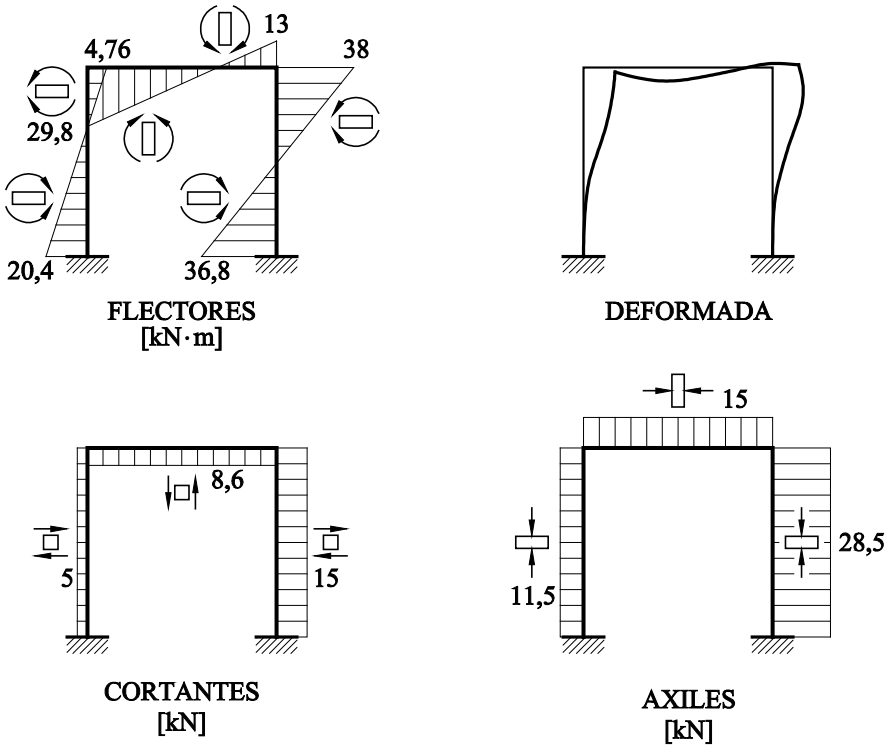


Figura 3.17: Leyes de esfuerzos del pórtico del Ejemplo 3.6.2

Ejemplo 3.6.3

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 3.18 para los valores: a = 5m, EI = $2\cdot10^5$ kN·m^2, EA = 10^7 kN, teniendo en cuenta que las barras tienen las mismas propiedades mecánicas. Calcular el valor de F según el Estado II del Ejemplo 2.5.2, es decir, para que corresponda a un incremento uniforme de temperatura Δt = 20ºC, si el coeficiente de dilatación del material es $\alpha = 10^{-6}/\,^{o}\mathrm{C}$.

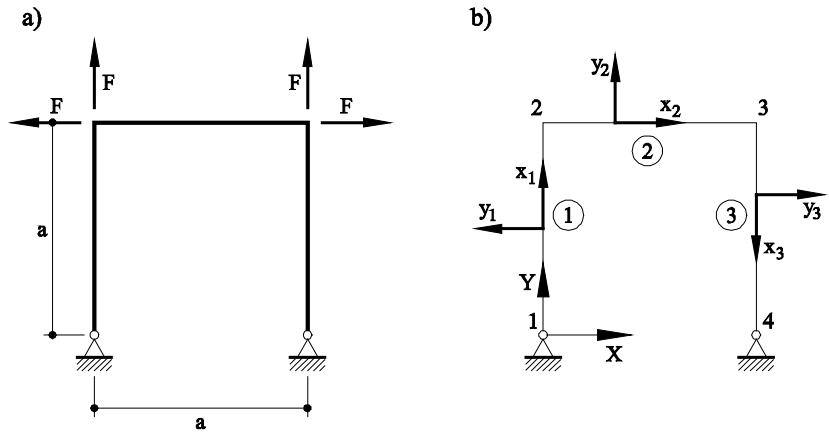


Figura 3.18: a) Pórtico del Ejemplo 3.6.3. b) Numeración y sistemas locales y global.

La solución del *Estado I*, intraslacional, del Ejemplo 2.5.2 (Capítulo 2), permite obtener las reacciones $F = EA\ \alpha\ \Delta t = 200\ \text{kN}$ que producen un estado de compresión idéntico en todas las barras (Figura 2.6a).

El *Estado II* con cargas en los nudos de valor *F* cambiadas de signo (ver Figura 3.18a), se resuelve por el Método de Rigidez. La resolución es similar al ejemplo anterior. La numeración de los nudos y de las barras, así como los ejes de referencia locales y global puede verse en la Figura 3.18b. Las matrices de rigidez de las barras y la matriz de rigidez global de la estructura son las mismas que las del ejemplo anterior.

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, es decir, apoyos articulados en los nudos 1 y 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad prescritos (1, 2 y 10, 11), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 16 & 4{,}80 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}80 & 201{,}92 & 0 & 4{,}80 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201{,}92 & 4{,}80 & 0 & -1{,}92 & 4{,}80 & 0 \\ 8 & 4{,}80 & 4{,}80 & 32 & 0 & -4{,}80 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 201{,}92 & 0 & 4{,}80 & 4{,}80 \\ 0 & -1{,}92 & -1{,}92 & -4{,}80 & 0 & 201{,}92 & -4{,}80 & 0 \\ 0 & 4{,}80 & 4{,}80 & 8 & 4{,}80 & -4{,}80 & 32 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}80 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \\ 200 \\ 0 \\ 200 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese la variación del sistema de ecuaciones, con respecto al ejemplo anterior. El término de la derecha corresponde al caso de carga considerado, en el que las fuerzas *F* actuantes sobre los nudos 2 y 3, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia.

Se observa que el caso de cargas es simétrico. Resolviendo, se obtienen los valores de los movimientos incógnita, que son los giros de los nudos de la estructura y los desplazamientos de los nudos 2 y 3:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ -0{,}5 \\ 1{,}0 \\ 0{,}06 \\ 0{,}5 \\ 1{,}0 \\ -0{,}06 \\ -0{,}12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1 y 4):

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}096 \\ -200 \\ -0{,}096 \\ -200 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN. Los esfuerzos en los extremos de las barras son:

$$[\mathbf{f}'_{12}]=\begin{bmatrix}F'_{x1}\\F'_{y1}\\M'_1\\F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-200\\-0{,}096\\0\\200\\0{,}096\\-0{,}48\end{bmatrix};[\mathbf{f}'_{23}]=\begin{bmatrix}F'_{x2}\\F'_{y2}\\M'_2\\F'_{x3}\\F'_{y3}\\M'_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-200\\0\\0{,}48\\200\\0\\-0{,}48\end{bmatrix};[\mathbf{f}'_{34}]=\begin{bmatrix}F'_{x3}\\F'_{y3}\\M'_3\\F'_{x4}\\F'_{y4}\\M'_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-200\\0{,}096\\0{,}48\\200\\-0{,}096\\0\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Nótese que en este estado de carga, la estructura trabaja fundamentalmente a esfuerzo axil; por esta razón, los valores de los movimientos de los nudos y los flectores y cortantes en las barras son muy pequeños. Sin embargo, los axiles *finales* que corresponden a un incremento uniforme de temperatura son nulos, ya que se obtienen sumando los aquí obtenidos *más* los del estado intraslacional, iguales y opuestos a éstos. La ley de flectores y la deformada se muestran en la Figura 2.10 (ver Capítulo 2).

Ejemplo 3.6.4

Resolver la estructura de la Figura 3.19 aplicando el Método de Rigidez, para los valores a=5 m, EI = $2\cdot10^5$ kN·m^2, EA=10^7 kN, F= 20 kN, V=20 kN y M = 25 kN·m. Este ejemplo coincide con el Ejemplo 3.6.2 pero con la variante de apoyo articulado en los nudos 1 y 4, con resortes en las articulaciones de rigidez k_Φ = 10^5 kN·m/rad.

La resolución de la estructura comienza por la numeración de los nudos y de las barras, tal como se hizo en los ejemplos anteriores. La numeración elegida y los sistemas locales y global de la estructura se muestran en la Figura 3.19b.

La única diferencia que presenta este ejemplo con respecto al Ejemplo 3.6.2 es el tipo de condición de apoyo de la estructura; por tanto las matrices de rigidez de las barras, así como el vector global de cargas, son iguales a los allí calculados.

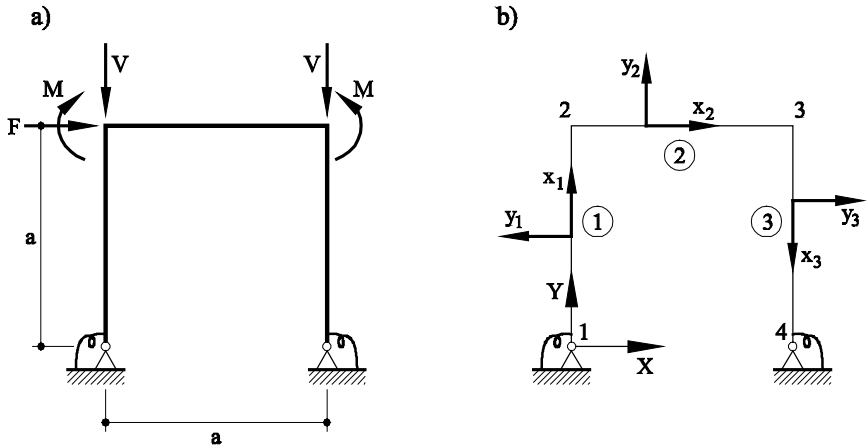


Figura 3.19: a) Pórtico del Ejemplo 3.6.4. b) Numeración y sistemas locales y global

Al introducir las condiciones de apoyo, es decir, los desplazamientos nulos y los resortes elásticos en los nudos 1 y 4, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$10^4\begin{bmatrix} [26] & 4{,}80 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}80 & 201{,}92 & 0 & 4{,}80 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 201{,}92 & 4{,}80 & 0 & -1{,}92 & 4{,}80 & 0 \\ 8 & 4{,}80 & 4{,}80 & 32 & 0 & -4{,}80 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 201{,}92 & 0 & 4{,}80 & 4{,}80 \\ 0 & -1{,}92 & -1{,}92 & -4{,}80 & 0 & 201{,}92 & -4{,}80 & 0 \\ 0 & 4{,}80 & 4{,}80 & 8 & 4{,}80 & -4{,}80 & 32 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4{,}80 & 0 & 8 & [26] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ -20 \\ -25 \\ 0 \\ -20 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El sistema reducido es el resultado de eliminar las filas y columnas 1,2 y 10,11 y de sumar la rigidez de los resortes a los términos diagonales de las ecuaciones correspondientes a los giros de los nudos 1 y 4 (grados de libertad 3 y 12, respectivamente).

Nótese la semejanza de la matriz global obtenida con la del Ejemplo 3.6.3; la estructura de la matriz es idéntica en los dos casos, con la única diferencia de que ahora se ha ensamblado la rigidez de los resortes elásticos en las posiciones marcadas con un corchete [·]. Para rigideces suficientemente pequeñas, las dos matrices resultan idénticas; para rigideces suficientemente grandes se obtendría $\phi_1 = \phi_4 = 0$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los valores de los movimientos incógnitas:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,78 \\ 13,6 \\ -0,0427 \\ -2,38 \\ 13,6 \\ -0,157 \\ -0,0513 \\ -2,49 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1 y 4), donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,16 \\ 8,53 \\ 17,8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13,8 \\ 31,5 \\ 24,9 \end{bmatrix}$$

Los esfuerzos en los extremos de las barras se obtienen siguiendo el procedimiento utilizado en los ejemplos anteriores:

$$[\mathbf{f}'_{12}] = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ M'_1 \\ F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ M'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,53 \\ 6,16 \\ 17,8 \\ -8,53 \\ -6,16 \\ 13,0 \end{bmatrix}; [\mathbf{f}'_{23}] = \begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ M'_2 \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13,8 \\ -11,5 \\ -38,0 \\ -13,8 \\ 11,5 \\ -19,3 \end{bmatrix}; [\mathbf{f}'_{34}] = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_3 \\ F'_{x4} \\ F'_{y4} \\ M'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31,5 \\ 13,8 \\ 44,3 \\ -31,5 \\ -13,8 \\ 24,9 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

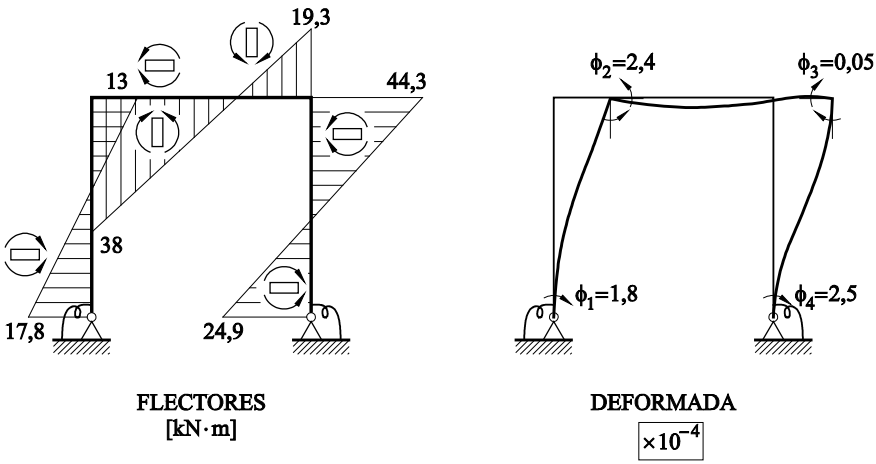


Figura 3.20: Ley de momentos flectores y deformada del pórtico del Ejemplo 3.6.4

El lector puede comparar la solución obtenida con la del Ejemplo 3.6.2, así como resolver de nuevo para diferentes valores de la rigidez de los resortes en los apoyos articulados.

Capítulo 4

TIPOLOGÍAS DE ESTRUCTURAS DE BARRAS

4.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han presentado las bases generales para el análisis de estructuras por métodos matriciales y en el Capítulo 3 se ha descrito con detalle la aplicación del método de rigidez al análisis de estructuras reticuladas de plano medio. Se continúa el estudio extendiendo la aplicación del método a otras tipologías de estructuras de barras, tales como emparrillados planos, estructuras reticuladas espaciales y estructuras articuladas planas y espaciales. En cada caso, se incide en las particularidades de la tipología estudiada, planteando las ecuaciones elásticas en ejes locales y la correspondiente transformación a ejes globales.

4.2. EMPARRILLADOS PLANOS

Un emparrillado plano es una estructura de nudos rígidos que soporta cargas exteriores normales a su plano (ver Figura 4.1); suelen ser estructuras de alto grado de hiperestatismo, difíciles de calcular por procedimientos manuales.

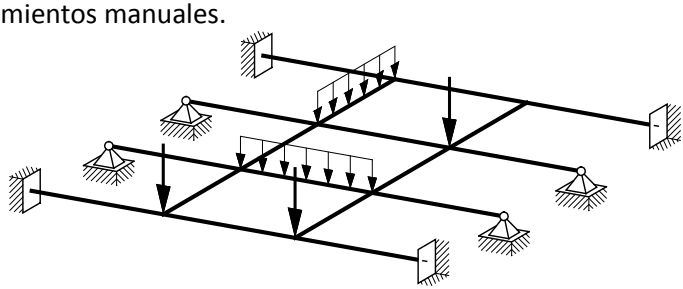


Figura 4.1: Emparrillado plano

Dentro de esta tipologa pueden encuadrarse los forjados de edificación y algunos tableros de puentes. Los emparrillados planos se suponen formados por vigas rectas de sección constante, en las que el plano vertical es principal de inercia de las piezas rígidamente unidas en sus extremos. En el análisis del emparrillado se consideran cargas verticales al plano del emparrillado y momentos de eje horizontal. Se considera, además, la rigidez torsional, pero se desprecia el efecto de alabeo.

Debido a la geometría plana y al tipo de acciones consideradas, son nulos los movimientos de los nudos en el plano horizontal y los giros de eje vertical. En consecuencia, los grados de libertad por nudo son tres, un desplazamiento de dirección vertical y dos giros de eje horizontal. Los vectores de movimientos y esfuerzos en extremo de pieza son (ver Figura 4.2):

$$\mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} M'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix} M'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix} \phi'_{xa} \\ v'_a \\ \phi'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} \phi'_{xb} \\ v'_b \\ \phi'_{zb} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Las ecuaciones elásticas de flexión y cortante son análogas a las correspondientes a las estructuras reticuladas de plano medio. En este caso, no hay esfuerzo axil pero en cambio hay momento torsor. Las ecuaciones elásticas del momento torsor son:

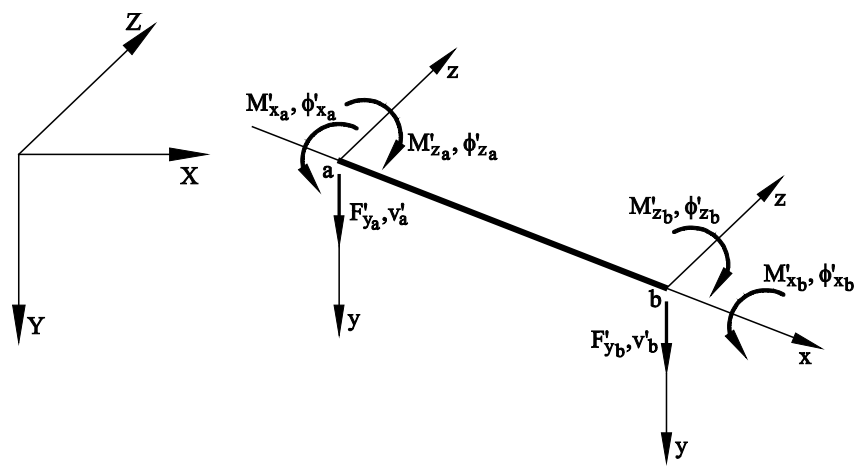


Figura 4.2: Pieza de emparrillado plano

$$M'_{xa} = +\frac{GI_t}{l}\left(\phi'_{xa} - \phi'_{xb}\right)$$
$$M'_{xb} = -\frac{GI_t}{l}\left(\phi'_{xa} - \phi'_{xb}\right) \tag{4.2}$$

donde GI_t es la inercia a torsión de la pieza.

Se observa que son términos formalmente análogos a los correspondientes a axil en las estructuras reticuladas de plano medio (ver ecuaciones (2.4)).

Tomando los ejes locales de forma que los ejes (*y, z*) sean los principales de inercia de la pieza, las ecuaciones elásticas de los emparrillados planos pueden escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

con las matrices:

$$\mathbf{K}'_{aa} = \begin{bmatrix} +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{K}'_{ba} = \begin{bmatrix} -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{bb} = \begin{bmatrix} +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Finalmente, la expresión (4.3) puede escribirse de forma más compacta:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{K}'\,\mathbf{d}' \tag{4.5}$$

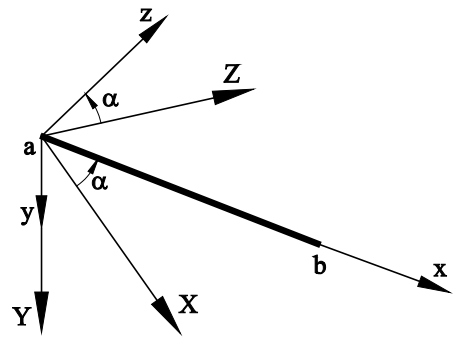


Figura 4.3: Transformación de sistema de referencia

La relación entre los ejes locales y globales puede verse en la Figura 4.3. Los ejes globales *X, Z* y los locales *x, z* son horizontales mientras que los ejes *Y, y* son verticales y coincidentes. Por tanto, la matriz de transformación **T** entre ellos es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Se pueden transformar las matrices elementales a coordenadas globales, mediante la transformación:

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{ij}\,\mathbf{T}^{T} \tag{4.7}$$

El proceso de ensamblaje, imposición de las condiciones de apoyo, resolución y cálculo de esfuerzos en las piezas y de las reacciones es análogo al descrito en el Capítulo 3 para las estructuras reticuladas de plano medio. A continuación, a modo de ejemplo se resuelven algunos emparrillados planos mediante el método de rigidez.

Ejemplo 4.2.1

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 4.4a bajo las cargas que se indican. La rigidez a flexión *EI* y la rigidez a torsión GI_t de las barras son constantes.

Datos: a = 3 m , b = 6m , $EI = 40 \cdot 10^7$ kN·m^2, $GI_t = 3 \cdot 10^6$ kN·m^2, P_y = 60 kN, M_x=60 kN·m.

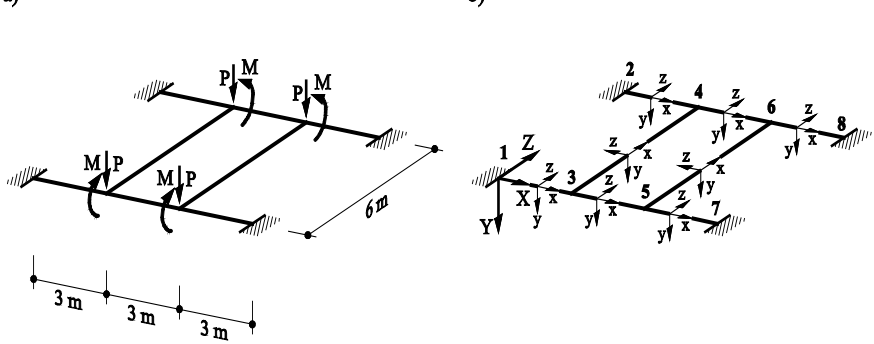


Figura 4.4: Estructura del Ejemplo 4.2.1: Geometría y numeración de los nudos

La estructura a resolver es un emparrillado plano doblemente simétrico en cuanto a geometría y cargas. La resolución de la estructura comienza por la numeración de los nudos y de las barras. La numeración elegida, así como los correspondientes ejes de referencia globales y locales de la estructura se muestran en la Figura 4.4b.

Se calculan, a continuación, las matrices de rigidez de las piezas en ejes locales. Si bien la rigidez a flexión y a torsión de las barras es constante, al variar la longitud de las barras se obtendrán matrices de rigidez elemental diferentes.

Barras paralelas al eje X

Las barras paralelas al eje global X tienen una longitud l = 3 m y forman un ángulo con el sistema global de coordenadas α = 0º, por tanto, la matriz de rigidez de la barra referida al sistema local de coordenadas coincidirá con la matriz de rigidez de la misma referida al sistema global.

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{K}'_{aa}=\begin{bmatrix}+\mathrm{A} & 0 & 0\\ 0 & +\mathrm{B} & +\mathrm{C}\\ 0 & +\mathrm{C} & +\mathrm{D}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{ab}=\begin{bmatrix}-\mathrm{A} & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{B} & +\mathrm{C}\\ 0 & -\mathrm{C} & +\mathrm{E}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{ba}=\begin{bmatrix}-\mathrm{A} & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{B} & -\mathrm{C}\\ 0 & +\mathrm{C} & +\mathrm{E}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{bb}=\begin{bmatrix}+\mathrm{A} & 0 & 0\\ 0 & +\mathrm{B} & -\mathrm{C}\\ 0 & -\mathrm{C} & +\mathrm{D}\end{bmatrix}$$

donde:

$\mathrm{A}=GI_t/l=10^6 \quad \mathrm{B}=12EI/l^3=17{,}78\cdot10^7 \quad \mathrm{C}=6EI/l^2=26{,}67\cdot10^7$

$\mathrm{D}=4EI/l=53{,}33\cdot10^7 \qquad \mathrm{E}=2EI/l=26{,}67\cdot10^7$

Las fuerzas se expresan en Newtons, y las longitudes en metros.

Barras paralelas al eje Z

En este caso, la longitud de las barras es *l* = 6 m y forman un ángulo con el sistema global de coordenadas α = 90º. La matriz de rigidez elemental puede escribirse:

$$\mathbf{K}'=\begin{bmatrix}\mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab}\\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb}\end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{K}'_{aa}=\begin{bmatrix}+\mathrm{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & +\mathrm{B}_1 & +\mathrm{C}_1\\ 0 & +\mathrm{C}_1 & +\mathrm{D}_1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{ab}=\begin{bmatrix}-\mathrm{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{B}_1 & +\mathrm{C}_1\\ 0 & -\mathrm{C}_1 & +\mathrm{E}_1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{ba}=\begin{bmatrix}-\mathrm{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{B}_1 & -\mathrm{C}_1\\ 0 & +\mathrm{C}_1 & +\mathrm{E}_1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}'_{bb}=\begin{bmatrix}+\mathrm{A}_1 & 0 & 0\\ 0 & +\mathrm{B}_1 & -\mathrm{C}_1\\ 0 & -\mathrm{C}_1 & +\mathrm{D}_1\end{bmatrix}$$

donde:

$\mathrm{A}_1=GI_t/l=0{,}5\cdot10^6 \quad \mathrm{B}_1=12EI/l^3=2{,}22\cdot10^7 \quad \mathrm{C}_1=6EI/l^2=6{,}67\cdot10^7$

$\mathrm{D}_1=4EI/l=26{,}67\cdot10^7 \qquad \mathrm{E}_1=2EI/l=13{,}33\cdot10^7$

y la matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} +\mathrm{D}_1 & -\mathrm{C}_1 & 0 \\ -\mathrm{C}_1 & +\mathrm{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & +\mathrm{A}_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} +\mathrm{E}_1 & +\mathrm{C}_1 & 0 \\ -\mathrm{C}_1 & -\mathrm{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{A}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \begin{bmatrix} +\mathrm{E}_1 & -\mathrm{C}_1 & 0 \\ +\mathrm{C}_1 & -\mathrm{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{A}_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} +\mathrm{D}_1 & +\mathrm{C}_1 & 0 \\ +\mathrm{C}_1 & +\mathrm{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & +\mathrm{A}_1 \end{bmatrix}$$

Puede observarse que, en este caso, las matrices en ejes globales son idénticas a **K´**, salvo permutaciones de filas y columnas.

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene mediante el proceso de ensamblaje. Si se tiene en cuenta la doble simetría de la estructura y de la carga, se deduce que los movimientos de los nudos deben ser simétricos y por tanto, basta conocer los movimientos de uno de ellos para resolver el problema. Si se elige, por ejemplo, el nudo 3 y se plantea la condición de equilibrio entre fuerzas externas en el nudo y esfuerzos internos en los extremos de las barras que concurren a él, puede escribirse (ver ecuación (3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= (\mathbf{f}_b)_{13} + (\mathbf{f}_a)_{34} + (\mathbf{f}_a)_{35} \\ &= (\mathbf{K}_{ba})_{13}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{bb})_{13}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{aa})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34}\,\mathbf{d}_4 + (\mathbf{K}_{aa})_{35}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{35}\,\mathbf{d}_5 \end{aligned}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, en este caso, empotramiento en los nudos 1 y 2, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1,2,3 y 4,5,6), y el sistema de ecuaciones reducido que permite obtener los movimientos en el nudo 3 es el siguiente:

$$
10^3 \cdot \begin{vmatrix} -60 \\ +60 \\ 0 \\ +60 \\ +60 \\ 0 \\ -60 \\ +60 \\ 0 \end{vmatrix} = 10^6 \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (K_{bb})_{13} + (K_{aa})_{34} + (K_{aa})_{35} & (K_{ab})_{34} & K_{ab})_{35} \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} 266,7 & -66,7 & 0 & 133,3 & 66,7 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -66,7 & 377,8 & 0 & -66,7 & -22,2 & 0 & 0 & -177,8 & 266,7 \\ 0 & 0 & 1067 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -266,7 & 266,7 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \end{array}
$$

El término de la izquierda del sistema anterior corresponde al caso de cargas considerado, en el que las fuerzas F_y y los momentos actuantes M_x sobre los nudos 3,4 y 5, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia.

Además por doble simetría del problema, puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
v_3 &= v_4 = v_5 = v_6 \\
\phi_{x3} &= -\phi_{x4} = \phi_{x5} = -\phi_{x6} \\
\phi_{z3} &= \phi_{z4} = -\phi_{z5} = -\phi_{z6}
\end{aligned}
$$

El sistema de ecuaciones que permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados al nudo 3, correspondientes a los grados de libertad 7,8,9, puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
(132,4\,\phi_{x3})10^3 &= -60 \\
(177,8\,v_3 - 266,7\phi_{z3})10^3 &= +60 \\
(-266,7\,v_3 + 799,8\,\phi_{z3})10^3 &= 0
\end{aligned}
$$

La solución del sistema anterior permite obtener:

$$
\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} \varphi_{x3} \\ v_3 \\ \varphi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,5317 \\ +6,7517 \\ +2,2514 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}
$$

donde el desplazamiento se expresa en metros y los giros en radianes. Los movimientos de los nudos 4,5,6 son iguales en valor absoluto y sus signos se deducen por la condición de simetría.

Cálculo de las reacciones

Recuperando el sistema de ecuaciones completo, se calculan las reacciones incógnitas en los nudos con movimientos prescritos (nudos 1, 2, 7 y 8). También en este caso, por simetría, basta con conocer las reacciones en uno sólo de los nudos prescritos. Por ejemplo, aplicando la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción F_y en el nudo 1, puede escribirse:

$$F_{y1} = \sum_{j=1}^{24} K_{2j}\, d_j = -\,\mathrm{B}\, v_3 + \mathrm{C}\, \phi_{z3} = -60\ \mathrm{kN} \qquad (\uparrow)$$

Nótese que al existir sólo cargas en los nudos, el término que corresponde a la reacción de empotramiento es nulo. Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} M_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0{,}453 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix}$$

donde la fuerza se expresa en kN y los momentos en kN·m. Las reacciones en los nudos prescritos restantes son iguales en valor absoluto y sus signos se deducen por la condición de doble simetría.

Cálculos de los esfuerzos en las barras

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2. Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo *a* de la barra 13 $(\alpha_{13} = 0^{\mathrm{o}})$, son:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \left(\mathbf{K}'_{aa}\right)_{13} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_1 + \left(\mathbf{K}'_{ab}\right)_{13} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_3$$

Teniendo en cuenta que los ejes locales de la barra coinciden con el sistema de referencia global y que los movimientos del nudo 1 son nulos, se obtiene:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \begin{bmatrix} -\mathrm{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{B} & \mathrm{C} \\ 0 & -\mathrm{C} & \mathrm{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{x3} \\ v_3 \\ \phi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{A}\phi_{x3} \\ -\mathrm{B}\,v_3 + \mathrm{C}\phi_{z3} \\ -\mathrm{C}\,v_3 + \mathrm{E}\phi_{z3} \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \begin{bmatrix} M'_{x1} \\ F'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0{,}453 \\ -60 \\ -120 \end{bmatrix}$$

donde los momentos se expresan en kN·m y la fuerza en kN. Nótese que los esfuerzos en el extremo 1 de la barra 13 coinciden con el valor de las reacciones en el nudo 1. Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras:

$$\mathbf{f}'_{13} = \begin{bmatrix} M'_{x1} \\ F'_{y1} \\ M'_{z1} \\ M'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0{,}453 \\ -60 \\ -120 \\ -0{,}453 \\ +60 \\ -60 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{f}'_{34} = \begin{bmatrix} M'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_{z3} \\ M'_{x4} \\ F'_{y4} \\ M'_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +60{,}453 \\ 0 \\ 0 \\ -60{,}453 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{f}'_{35} = \begin{bmatrix} M'_{x3} \\ F'_{y3} \\ M'_{z3} \\ M'_{x5} \\ F'_{y5} \\ M'_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +60 \\ 0 \\ 0 \\ -60 \end{bmatrix}$$

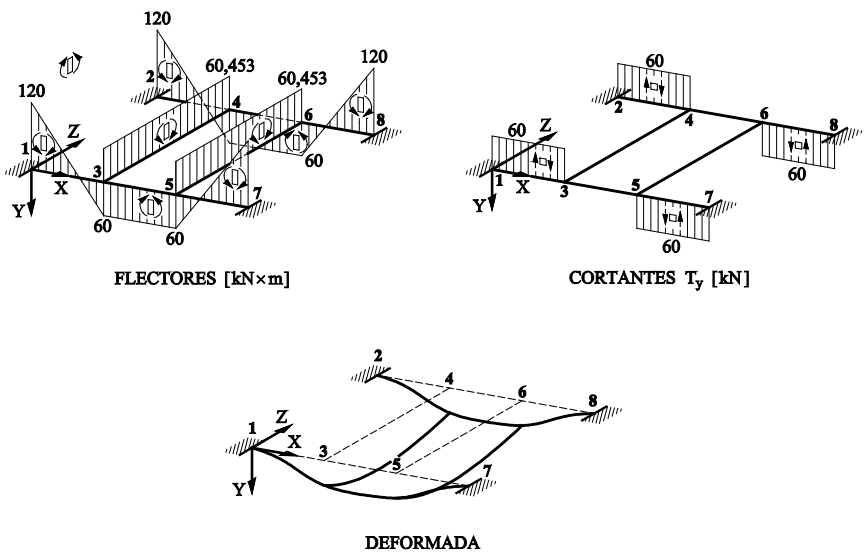


Figura 4.5: Ejemplo 4.2.1:Leyes de esfuerzos y deformada

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Los esfuerzos en las barras restantes se deducen fácilmente por simetría. Las leyes de esfuerzos y la deformada se muestran en la Figura 4.5.

4.3. ESTRUCTURAS RETICULADAS ESPACIALES

Las estructuras reticuladas espaciales están formadas por piezas prismáticas cuyas directrices están en diferentes planos y unidas entre sí por nudos rígidos (ver Figura 4.6).

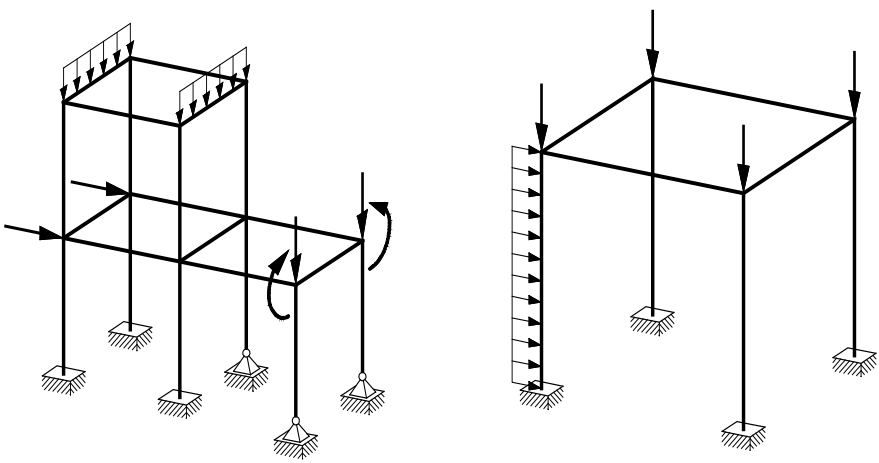


Figura 4.6: Estructuras reticuladas espaciales

En este caso, las ecuaciones elásticas de una barra aislada tienen la forma general:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

en la que los vectores de esfuerzos y movimientos en extremo de pieza son de seis componentes cada uno (ver Figura 4.7):

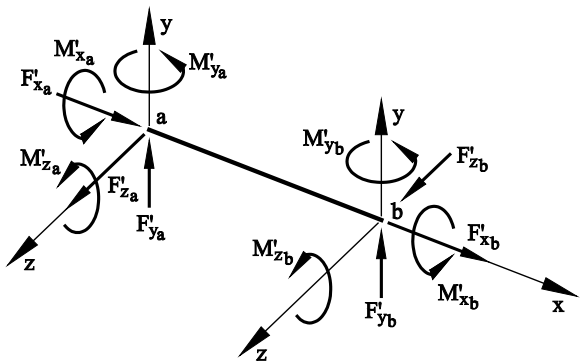


Figura 4.7: Pieza de estructura reticulada espacial

$$\mathbf{f}'_a = \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ F'_{za} \\ M'_{xa} \\ M'_{ya} \\ M'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}'_b = \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ F'_{zb} \\ M'_{xb} \\ M'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_a = \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ w'_a \\ \phi'_{xa} \\ \phi'_{ya} \\ \phi'_{za} \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ w'_b \\ \phi'_{xb} \\ \phi'_{yb} \\ \phi'_{zb} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Si la estructura reticulada espacial se supone formada por vigas rectas de sección constante, se desprecian los efectos de alabeo por torsión y se toman los ejes locales de forma que los ejes *y, z* sean los principales de inercia de la pieza, las matrices de rigidez elementales vienen dadas por las siguientes expresiones, en las que *EA* es la rigidez a axil, EI_y y EI_z son las rigideces a flexión en los respectivos planos de inercia y GI_t es la inercia a torsión.

$$\mathbf{K}'_{aa} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & +\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{K}'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & +\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$\mathbf{K}'_{bb} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & +\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & +\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & +\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Puede verse que las matrices $\mathbf{K}'_{aa}$ y $\mathbf{K}'_{bb}$ son simétricas y la matriz $\mathbf{K}'_{ab} = \mathbf{K}'^{T}_{ba}$.

La transformación de las ecuaciones elásticas a globales se hace mediante la matriz de transformación correspondiente, que en este caso es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} X\hat{x} & X\hat{y} & X\hat{z} & & & \\ Y\hat{x} & Y\hat{y} & Y\hat{z} & & 0 & \\ Z\hat{x} & Z\hat{y} & Z\hat{z} & & & \\ & & & X\hat{x} & X\hat{y} & X\hat{z} \\ & 0 & & Y\hat{x} & Y\hat{y} & Y\hat{z} \\ & & & Z\hat{x} & Z\hat{y} & Z\hat{z} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

donde $X\hat{x}, X\hat{y}$, etc. son los cosenos directores de los ángulos comprendidos entre los ejes correspondientes del sistema global y local.

La transformación de matrices de rigidez elementales a coordenadas globales viene dada por la expresión general:

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T}\,\mathbf{K}'_{ij}\,\mathbf{T}^T \tag{4.14}$$

El proceso de ensamblaje, la imposición de las condiciones de apoyo, la resolución y el cálculo de los esfuerzos en las piezas y de las reacciones es análogo al descrito para las otras tipologías. A continuación, se resuelven a modo de ejemplo algunas estructuras reticuladas espaciales mediante el método de rigidez.

Ejemplo 4.3.1

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 4.8a bajo las cargas que se indican. La rigidez de las barras a flexión *EI*, a axil *EA* y a torsión GI_t es constante.

Datos: a = 5 m, EA = 10^7 kN, EI = 10^5 kN·m^2, GI_t = 10^4 kN·m^2, $|F_x| = |F_y| = |F_z| = 500$ kN

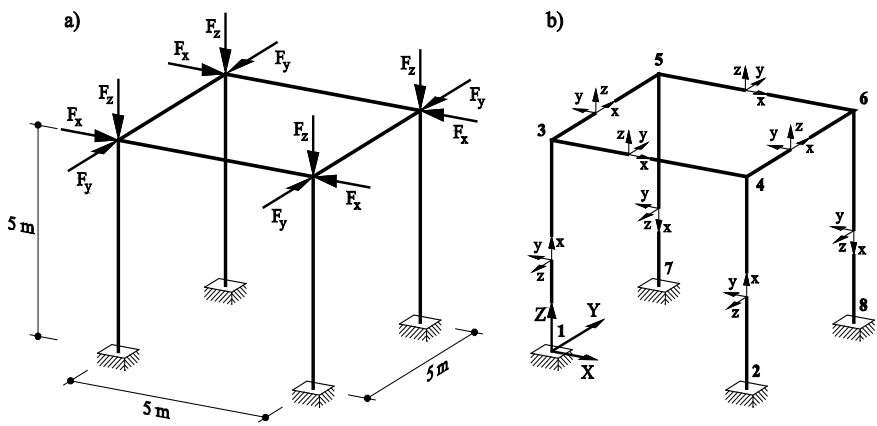


Figura 4.8: Estructura del Ejemplo 4.3.1: Geometría y numeración de los nudos

La estructura es reticulada espacial doblemente simétrica en cuanto a geometría y cargas. La resolución de la estructura comienza por la numeración de los nudos y de las barras. La numeración elegida, así como los correspondientes ejes de referencia globales y locales de la estructura se muestran en la Figura 4.8b.

Se calculan, a continuación, las matrices de rigidez de las piezas en ejes locales. En este caso, las propiedades de las barras son idénticas, por tanto, estas matrices de rigidez son iguales para todas ellas y de valor:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{K}'_{aa} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & E & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}'_{ab} = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & -B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & F & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'_{ba} = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}'_{bb} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & E & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

donde:
$$A = EA/l = 2\cdot 10^9 \quad B = 12EI/l^3 = 9{,}6\cdot 10^6 \quad C = 6EI/l^2 = 24\cdot 10^6$$
$$D = GI_t/l = 2\cdot 10^6 \quad E = 4EI/l = 80\cdot 10^6 \quad F = 2EI/l = 40\cdot 10^6$$

Las fuerzas se expresan en Newtons y las longitudes en metros.

Las matrices de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta la expresión (4.14) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas son las siguientes:

Barras paralelas al eje X:

Al ser los ejes locales de las barras paralelos a los ejes globales, la matriz de transformación de coordenadas **T** = **I**, por tanto, la matriz global coincide con la matriz elemental de la barra y puede escribirse:

$$\mathbf{K}'_{ij} = \mathbf{K}_{ij}$$

Barras paralelas al eje Y:

La matriz de transformación de coordenadas, en este caso resulta igual a:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez global, aplicando la ecuación (4.14) es:

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & -D & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

Barras paralelas al eje Z:

La matriz de transformación de coordenadas, para estas barras es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez global :

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & B & 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & E & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & -B & 0 & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & F & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & -C & 0 \\ 0 & -B & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C & 0 & F & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & -C & 0 \\ 0 & B & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & E & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene mediante el proceso de ensamblaje. Si se tiene en cuenta la doble simetría de la estructura y de la carga, se deduce que los movimientos de los nudos deben ser simétricos y por tanto, basta conocer los movimientos de uno de ellos para resolver el problema.

Si se elige, por ejemplo, el nudo 3 y se plantea la condición de equilibrio entre fuerzas externas en el nudo y esfuerzos internos en los extremos de las barras que concurren a él, puede escribirse (ver ecuación (3.1):

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{f}_b)_{13} + (\mathbf{f}_a)_{34} + (\mathbf{f}_a)_{35}$$

$$= (\mathbf{K}_{ba})_{13}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{bb})_{13}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{aa})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34}\,\mathbf{d}_4 + (\mathbf{K}_{aa})_{35}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{35}\,\mathbf{d}_5$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, en este caso, empotramiento en los nudos 1, 2, 7 y 8, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1 al 6, 7 al 12, 37 al 42 y 43 al 48).

El sistema de ecuaciones reducido que permite obtener los movimientos en el nudo 3 se muestra a continuación.

Debe señalarse que el término de la izquierda del sistema de ecuaciones corresponde al caso de cargas considerado, en el que las fuerzas de componentes, F_x, F_y y F_z actuantes sobre los nudos 3, 4, 5 y 6, se han introducido con los signos correspondientes, respecto al sistema global de referencia.

$$
\begin{array}{cc|cccccc|cccccc|cccccc|c}
 & & \cdots\cdots & (K_{bb})_{13}+(K_{aa})_{34}+(K_{aa})_{35} & & & & & \cdots\cdots & (K_{ab})_{34} & & & & & \cdots\cdots & (K_{ab})_{35} & & & & & \\
 & & & \Downarrow & & & & & & \Downarrow & & & & & & \Downarrow & & & & & \\
 & 500 & 2010 & 0 & 0 & 0 & -24 & -24 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & u_3 \\
 & 500 & 0 & 2010 & 0 & 24 & 0 & 24 & 0 & -9,6 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & -2000 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 \\
 & -500 & 0 & 0 & 2010 & 24 & -24 & 0 & 0 & 0 & -9,6 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & -9,6 & 24 & 0 & 0 & w_3 \\
 & 0 & 0 & 24 & 24 & 162 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 40 & 0 & 0 & \varphi_{x3} \\
 & 0 & -24 & 0 & -24 & 0 & 162 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \varphi_{y3} \\
 & 0 & -24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 162 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 & 40 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 40 & \varphi_{z3} \\
 & -500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_4 \\
 & 500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & v_4 \\
10^3 & -500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w_4 \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{x4} \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{y4} \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{z4} \\
 & 500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_5 \\
 & -500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & v_5 \\
 & -500 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & w_5 \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{x5} \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{y5} \\
 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \varphi_{z5}
\end{array}
= 10^6
$$

Además por la simetría del problema, puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
u_3 &= -u_4 = u_5 = -u_6 \\
v_3 &= v_4 = -v_5 = -v_6 \\
w_3 &= w_4 = w_5 = w_6 \\
\varphi_{x3} &= \varphi_{x4} = -\varphi_{x5} = -\varphi_{x6} \\
\varphi_{y3} &= -\varphi_{y4} = \varphi_{y5} = -\varphi_{y6} \\
\varphi_{z3} &= \varphi_{z4} = \varphi_{z5} = \varphi_{z6}
\end{aligned}
\qquad (a)
$$

El sistema de ecuaciones que permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados al nudo 3 correspondientes a los grados de libertad 13 al 18, puede escribirse:

$$
\begin{aligned}
\left(4000\, u_3 - 24\, \varphi_{y3} - 48\, \varphi_{z3}\right) 10^3 &= 500 \\
\left(4000\, v_3 + 24\, \varphi_{x3} + 48\, \varphi_{z3}\right) 10^3 &= 500 \\
\left(1990,4\, w_3\right) 10^3 &= -500 \\
\left(24 v_3 + 120 \varphi_{x3}\right) 10^3 &= 0 \\
\left(-24 u_3 + 120 \varphi_{y3}\right) 10^3 &= 0 \\
\left(242 \varphi_{z3}\right) 10^3 &= 0
\end{aligned}
$$

La solución del sistema anterior permite obtener los movimientos incógnitas:

$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 1,25 \\ -2,50 \\ -0,250 \\ +0,250 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes. Los movimientos de los nudos 4, 5 y 6 se deducen por simetría a partir de las relaciones (*a*).

Cálculo de las reacciones

Partiendo del sistema completo de ecuaciones, se calculan las reacciones en los nudos con movimientos prescritos, nudos 1,2, 7 y 8. También en el caso de las reacciones por simetría, basta conocer las de uno sólo de los nudos prescritos. Por ejemplo, si se aplica la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción F_z en el nudo 1, puede escribirse:

$$F_{z1} = \sum_{j=1}^{48} K_{3j}\, d_j = -\,\mathrm{A}\, w_3 = 500 \times 10^3 \ \mathrm{N} \qquad (\uparrow)$$

Nótese que al existir cargas sólo en los nudos, el término que corresponde a la reacción de empotramiento es nulo. Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -600 \\ 500 \cdot 10^3 \\ 2000 \\ -2000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresa en N y los momentos en N·m.
Las reacciones en los nudos prescritos restantes son iguales en valor absoluto y sus signos se deducen por la condición de simetría.

Cálculo de los esfuerzos en las barras

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2. Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo *a* de la barra 13, son:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \left(\mathbf{K}'_{aa}\right)_{13}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_1 + \left(\mathbf{K}'_{ab}\right)_{13}\mathbf{T}^T\mathbf{d}_3$$

Teniendo en cuenta que los movimientos del nudo 1 son nulos, se obtiene:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \begin{bmatrix} -\mathrm{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{B} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{C} \\ 0 & 0 & -\mathrm{B} & 0 & -\mathrm{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} & 0 & \mathrm{F} & 0 \\ 0 & -\mathrm{C} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & -1 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & \mathbf{0} & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{x3} \\ \phi_{y3} \\ \phi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{A}w_3 \\ \mathrm{B}u_3 - \mathrm{C}\phi_{y3} \\ \mathrm{B}v_3 + \mathrm{C}\phi_{x3} \\ -\mathrm{D}\phi_{z3} \\ -\mathrm{C}v_3 - \mathrm{F}\phi_{x3} \\ \mathrm{C}u_3 - \mathrm{F}\phi_{y3} \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{z1} \\ M'_{x1} \\ M'_{y1} \\ M'_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\times10^3 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \\ -2000 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en N y los momentos en N·m. Nótese que los esfuerzos en el extremo 1 de la barra 13 coinciden con el valor de las reacciones en el nudo 1. Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras:

$$\mathbf{f}'_{13} = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{z1} \\ M'_{x1} \\ M'_{y1} \\ M'_{z1} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\times10^3 \\ 600 \\ 600 \\ 0 \\ -2000 \\ 2000 \\ -500\times10^3 \\ -600 \\ -600 \\ 0 \\ -600 \\ 1000 \end{bmatrix}; \mathbf{f}'_{34} = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \\ F'_{x4} \\ F'_{y4} \\ F'_{z4} \\ M'_{x4} \\ M'_{y4} \\ M'_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\times10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ -500\times10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{f}'_{35} = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \\ F'_{x5} \\ F'_{y5} \\ F'_{z5} \\ M'_{x5} \\ M'_{y5} \\ M'_{z5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500\times10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ -500\times10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en N y los momentos en N·m.

Los esfuerzos en las barras restantes se deducen fácilmente por simetría. En la Figura 4.9 se muestran las leyes de momentos flectores, axiles y la deformada de la estructura. Nótese que los esfuerzos cortantes son prácticamente despreciables.

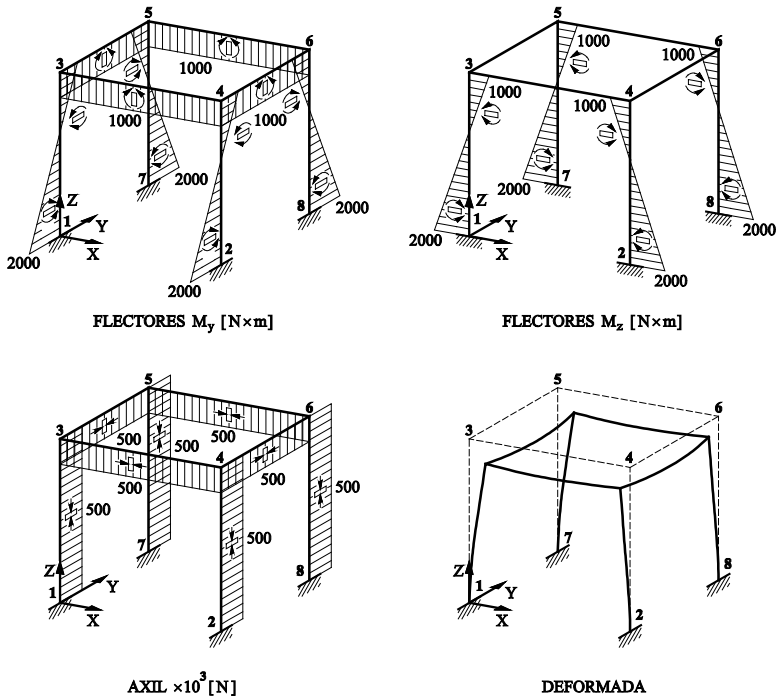


Figura 4.9: Ejemplo 4.3.1:Leyes de esfuerzos y deformada

Ejemplo 4.3.2

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 4.10a bajo la carga que se indica. La rigidez a flexión *EI*, a axil *EA* y a torsión GI_t, de las barras son constantes.

Datos: l = 3 m ; $EA = 9\cdot10^6$ kN· ; $EI = 9\cdot10^4$ kN·m^2, $GI_t = 6\cdot10^3$ kN·m^2, $|F_x| = |F_y| = |F_z| = 150$ kN

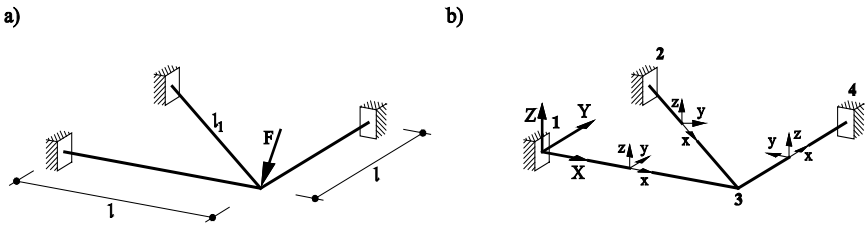


Figura 4.10: Estructura del Ejemplo 4.3.2: Geometría y numeración de los nudos

La estructura es reticulada plana dado que las directrices de las barras están situadas en el plano XY, sin embargo, para la carga aplicada en el nudo 3 de componentes F_x, F_y y F_z, debe analizarse como una estructura reticulada espacial.

La resolución comienza por la numeración de los nudos y de las barras. En la Figura 4.10b, se muestra la numeración elegida, así como, el sistema de referencia global y los correspondientes sistemas locales de referencia.

A continuación, se calculan las matrices de rigidez de las barras en ejes locales. En este caso, aunque la rigidez es igual para todas las barras, la longitud de las mismas varía, por tanto, las matrices elementales son diferentes. A partir de la expresión general (4.8):

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix}$$

Los valores de las submatrices para las distintas barras son los siguientes:

Barras 13 y 34 *(l*= 3 m*)*:

$$\left(\mathbf{K}'_{aa}\right)_{13-34} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & E & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{K}'_{ab}\right)_{13-34} = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & -B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & F & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}'_{ba})_{13-34} = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & -B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & 0 & F & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{K}'_{bb})_{13-34} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & 0 & B & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & E & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

donde: $A = EA/l = 3\cdot 10^9 \quad B = 12EI/l^3 = 4\cdot 10^7 \quad C = 6EI/l^2 = 6\cdot 10^7$

$D = GI_t/l = 2\cdot 10^6 \quad E = 4EI/l = 12\cdot 10^7 \quad F = 2EI/l = 6\cdot 10^7$

(Fuerzas en Newtons y longitudes en metros).

Barra 23 ($l_1 = 3\sqrt{2}$ m):

$$(\mathbf{K}'_{aa})_{23} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{K}'_{ab})_{23} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}'_{ba})_{23} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_1 & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & -B_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1 & 0 & F_1 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & F_1 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{K}'_{bb})_{23} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 & 0 & 0 & -C_1 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 & 0 & 0 & E_1 \end{bmatrix}$$

donde: $A_1 = EA/l_1 = 2{,}12\cdot 10^9 \quad B_1 = 12EI/l_1^3 = 1{,}414\cdot 10^7 \quad C_1 = 6EI/l_1^2 = 3\cdot 10^7$

$D_1 = GI_t/l_1 = 1{,}414\cdot 10^6 \quad E_1 = 4EI/l_1 = 8{,}485\cdot 10^7 \quad F_1 = 2EI/l_1 = 4{,}243\cdot 10^7$

Las matrices de rigidez de las barras en el *sistema global de referencia*, teniendo en cuenta la expresión (4.14) y el ángulo que forma cada barra con el sistema global de coordenadas son:

Barra paralela al eje X (13):

Al ser los ejes locales de la barra paralelos a los ejes globales, la matriz de transformación de coordenadas **T** = **I**, por tanto, la matriz global coincide con la matriz elemental de la barra y puede escribirse:

$$\mathbf{K}'_{ij} = \mathbf{K}_{ij}$$

Barra paralela al eje Y (34):

La matriz de transformación de coordenadas, en este caso resulta:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez global, aplicando la ecuación (4.14) es:

$$\left(\mathbf{K}_{aa}\right)_{34}=\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{34}=\begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & 0 & -C \\ 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & -D & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{K}_{ba}\right)_{34}=\begin{bmatrix} -B & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & -A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D & 0 \\ -C & 0 & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \qquad \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{34}=\begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix}$$

Puede observarse que, en este caso, las matrices en ejes globales son idénticas a **K'**, salvo permutaciones de filas y columnas.

***Barra diagonal (23)**:*

La matriz de transformación de coordenadas, para la barra 23 es igual a:

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} 0{,}707 & 0{,}707 & 0 & & & \\ -0{,}707 & 0{,}707 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ & \mathbf{0} & & -0{,}707 & 0{,}707 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez global, aplicando la ecuación (4.14) es:

$$(\mathbf{K}_{aa})_{23} = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ -B_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & D_2 & -C_2 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & E_2 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & F_2 & E_2 & 0 \\ C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{K}_{ab})_{23} = \begin{bmatrix} -A_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ B_2 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & -D_2 & -C_2 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & H_2 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & I_2 & H_2 & 0 \\ -C_2 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{ba})_{23} = \begin{bmatrix} -A_2 & B_2 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ B_2 & -A_2 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & -D_2 & C_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & H_2 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & I_2 & H_2 & 0 \\ C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{K}_{bb})_{23} = \begin{bmatrix} A_2 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ -B_2 & A_2 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & D_2 & C_2 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & E_2 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & F_2 & E_2 & 0 \\ -C_2 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes son el resultado de premultiplicar por T y post-multiplicar por T^T por ejemplo, A_2=Xx A_1 Xy + Xy B_1 Xy = 107 x 10^7, los restantes valores se obtienen de forma similar y su valor absoluto es:

$$B_2 = 105\times10^7 \quad C_2 = 2{,}12\times10^7 \quad D_2 = 1{,}41\times10^7 \quad E_2 = 4{,}31\times10^7 \quad F_2 = 4{,}17\times10^7$$
$$G_2 = 8{,}49\times10^7 \quad H_2 = 2{,}05\times10^7 \quad I_2 = 2{,}19\times10^7 \quad J_2 = 4{,}24\times10^7$$

(Fuerzas en Newtons y longitudes en metros).

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene mediante el proceso de ensamblaje.

En la estructura del Ejemplo 4.3.2, los movimientos incógnita son los correspondientes al nudo 3, planteando la condición de equilibrio entre fuerzas externas en el nudo y esfuerzos internos en los extremos de las barras que concurren a él, puede escribirse (ver ecuación (3.1)):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 &= (\mathbf{f}_b)_{13} + (\mathbf{f}_b)_{23} + (\mathbf{f}_a)_{34} \\ &= (\mathbf{K}_{ba})_{13}\,\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{bb})_{13}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ba})_{23}\,\mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{bb})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{aa})_{34}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34}\,\mathbf{d}_4 \end{aligned}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, en este caso, empotramiento en los nudos 1, 2 y 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos (1 al 6, 7 al 12, y 19 al 24).

El sistema de ecuaciones reducido que permite obtener los movimientos en el nudo 3 se escribe a continuación. Nótese que el

término de la izquierda del sistema corresponde al caso de cargas considerado, en el que las componentes F_x, F_y y F_z, de la fuerza actuante sobre el nudo 3 se han introducido con los signos correspondientes respecto al sistema global de referencia.

$$(K_{bb})_{13} + (K_{bb})_{23} + (K_{aa})_{34}$$
$$\Downarrow$$

$$\begin{vmatrix} -150 \\ -150 \\ -150 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} 10^3 = \begin{bmatrix} 411 & -105 & 0 & 0 & 0 & -8{,}12 \\ -105 & 411 & 0 & 0 & 0 & -8{,}12 \\ 0 & 0 & 9{,}41 & 8{,}12 & 8{,}12 & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}12 & 16{,}5 & 4{,}17 & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}12 & 4{,}17 & 16{,}5 & 0 \\ -8{,}12 & -8{,}12 & 0 & 0 & 0 & 32{,}5 \end{bmatrix} 10^7 \begin{vmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{z3} \end{vmatrix}$$

El sistema de ecuaciones que permite obtener el valor de los movimientos incógnita, es decir, los asociados al nudo 3, correspondientes a los grados de libertad 13 al 18, puede escribirse:

$$\begin{aligned} (411\,u_3 - 105\,v_3 - 8{,}12\,\phi_{z3})10^4 &= -150 \\ (-105\,u_3 + 411\,v_3 - 8{,}12\,\phi_{z3})10^4 &= -150 \\ (9{,}41\,w_3 + 8{,}12\,\phi_{x3} + 8{,}12\,\phi_{y3})10^4 &= -150 \\ (8{,}12\,w_3 + 16{,}5\,\phi_{x3} + 4{,}17\,\phi_{y3})10^4 &= 0 \\ (8{,}12\,w_3 + 4{,}17\,\phi_{x3} + 16{,}5\,\phi_{y3})10^4 &= 0 \\ (-8{,}12\,u_3 - 8{,}12\,v_3 + 32{,}5\,\phi_{z3})10^4 &= 0 \end{aligned}$$

La solución del sistema anterior permite obtener:

$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \\ \varphi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0497 \\ -0{,}0497 \\ -4{,}950 \\ +1{,}940 \\ +1{,}940 \\ -0{,}0248 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Puede verse que el sistema de ecuaciones anterior es un sistema desacoplado. Físicamente significa que el problema puede resolverse considerando por un lado la acción de las componentes F_x y F_y, es decir, analizando la estructura como reticulada plana, y por otro, resolviendo la estructura sólo bajo la acción de F_z como un emparrillado plano. La superposición de los dos estados proporciona la solución final.

Cálculo de las reacciones

De forma análoga a lo realizado en ejemplos anteriores, partiendo del sistema completo de ecuaciones, se calculan las reacciones en los nudos con movimientos prescritos, nudos 1,2 y 4. Por ejemplo, si se aplica la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción F_z en el nudo 2, puede escribirse:

$$F_{z2} = \sum_{j=1}^{24} K_{9j}\, d_j = -\mathrm{D}_2\, w_3 - \mathrm{C}_2\, \phi_{x3} - \mathrm{C}_2\, \phi_{y3} = -12{,}46 \times 10^3 \ \mathrm{N} \qquad (\downarrow)$$

Debe recordarse que al existir sólo cargas en los nudos, el término que corresponde a la reacción de empotramiento es nulo. Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +149{,}01 \\ +0{,}499 \\ +81{,}6 \\ -3{,}88 \\ -180{,}6 \\ +1{,}49 \end{bmatrix} 10^3 \qquad \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0{,}468 \\ +0{,}468 \\ -12{,}46 \\ -22{,}68 \\ -22{,}68 \\ +1{,}05 \end{bmatrix} 10^3 \qquad \begin{bmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ F_{z4} \\ M_{x4} \\ M_{y4} \\ M_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0{,}499 \\ +149{,}01 \\ +81{,}6 \\ -180{,}6 \\ -3{,}88 \\ +1{,}49 \end{bmatrix} 10^3$$

donde las fuerzas se expresa en N y los momentos en N·m.

Cálculo de los esfuerzos en las barras

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2. Así, por ejemplo, los esfuerzos en el extremo *a* de la barra 13, son:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \left(\mathbf{K}'_{aa}\right)_{13} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_1 + \left(\mathbf{K}'_{ab}\right)_{13} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_3$$

Teniendo en cuenta que el sistema local de referencia de la barra 13 coincide con el global, es decir que $\mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ y que los movimientos del nudo 1 son nulos, se obtiene:

$$\left(\mathbf{f}'_a\right)_{13} = \begin{bmatrix} -A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & -B & 0 & -C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & F & 0 \\ 0 & -C & 0 & 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \\ \phi_{x3} \\ \phi_{y3} \\ \phi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Au_3 \\ -Bv_3 + C\phi_{z3} \\ -Bw_3 + C\phi_{y3} \\ -D\phi_{x3} \\ Cw_3 + F\phi_{y3} \\ -Cv_3 + F\phi_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +149{,}01 \\ +0{,}499 \\ +81{,}6 \\ -3{,}88 \\ -180{,}6 \\ +1{,}49 \end{bmatrix} 10^3$$

Nótese que los esfuerzos en el extremo 1 de la barra 13 coinciden con el valor de las reacciones en el nudo 1. Repitiendo el procedimiento se obtienen los restantes valores para los esfuerzos en los extremos de las barras:

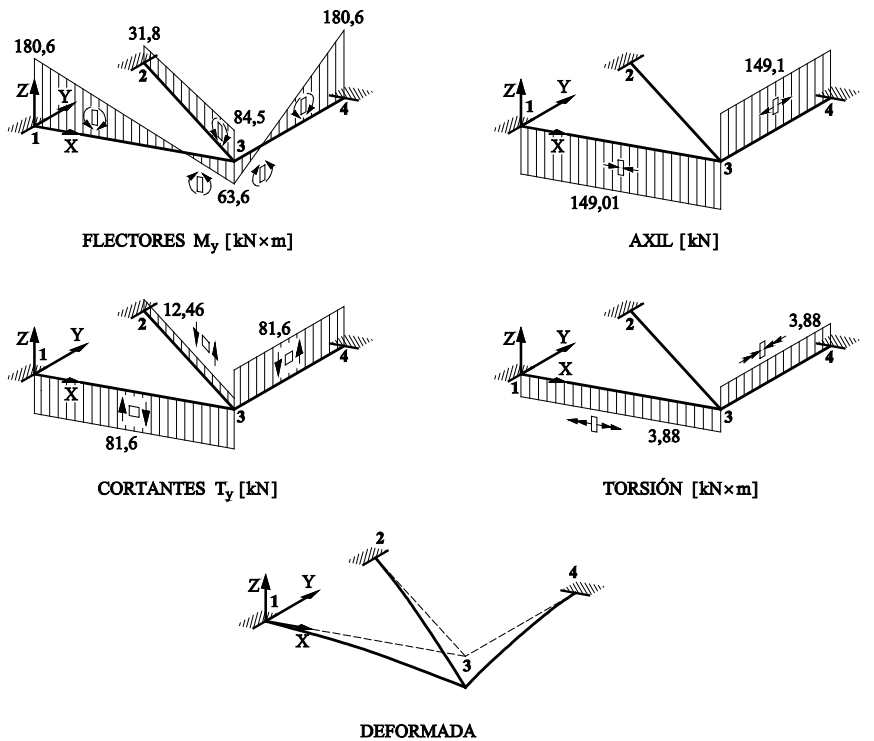


Figura 4.11: Estructura del Ejemplo 4.3.2:Leyes de esfuerzos y deformada

$$\mathbf{f}'_{13} = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{y1} \\ F'_{z1} \\ M'_{x1} \\ M'_{y1} \\ M'_{z1} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 149{,}01 \\ 0{,}499 \\ 81{,}6 \\ -3{,}88 \\ -180{,}6 \\ 1{,}49 \\ -149{,}01 \\ -0{,}499 \\ -81{,}6 \\ 3{,}88 \\ -63{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} 10^3 \; ; \; \mathbf{f}'_{23} = \begin{bmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \\ F'_{z2} \\ M'_{x2} \\ M'_{y2} \\ M'_{z2} \\ F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}249 \\ -12{,}46 \\ 0 \\ -31{,}8 \\ 1{,}06 \\ 0 \\ -0{,}249 \\ 12{,}46 \\ 0 \\ 84{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} 10^3 \; ; \; \mathbf{f}'_{34} = \begin{bmatrix} F'_{x3} \\ F'_{y3} \\ F'_{z3} \\ M'_{x3} \\ M'_{y3} \\ M'_{z3} \\ F'_{x4} \\ F'_{y4} \\ F'_{z4} \\ M'_{x4} \\ M'_{y4} \\ M'_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -149{,}01 \\ 0{,}499 \\ -81{,}6 \\ 3{,}88 \\ 63{,}6 \\ 0 \\ +149{,}01 \\ -0{,}499 \\ 81{,}6 \\ -3{,}88 \\ 180{,}6 \\ 1{,}49 \end{bmatrix} 10^3$$

En la Figura 4.11 se muestran las leyes de momentos flectores y torsores, axiles, cortantes, y la deformada de la estructura.

4.4. ESTRUCTURAS ARTICULADAS PLANAS

Las estructuras articuladas son estructuras de barras unidas entre sí mediante nudos articulados, por consiguiente, pueden considerarse como un caso particular de las estructuras reticuladas. Al tener ambos extremos articulados los momentos en extremo de pieza serán nulos.

Si existen cargas directamente aplicadas en las barras, las piezas biarticuladas sólo sufren flexión local y los momentos flectores y esfuerzos cortantes pueden hallarse directamente, estudiando las piezas aisladas como biapoyadas.

Por tanto, en una estructura como la de la Figura 4.12, se tendrán en primer lugar, unos esfuerzos *locales* de flexión y cortante debidos a la carga directamente aplicada sobre las piezas y, en segundo lugar, unas fuerzas aplicadas en los nudos, resultantes de trasladar la carga de las piezas a los nudos.

Este segundo caso de carga da lugar únicamente a esfuerzos axiles en las barras y es el que se estudia en el cálculo matricial de la estructura, que queda muy simplificado.

Se mantienen, en lo que sigue, los criterios de signos y los sistemas de referencia utilizados para las estructuras de plano medio (Figura 4.13).

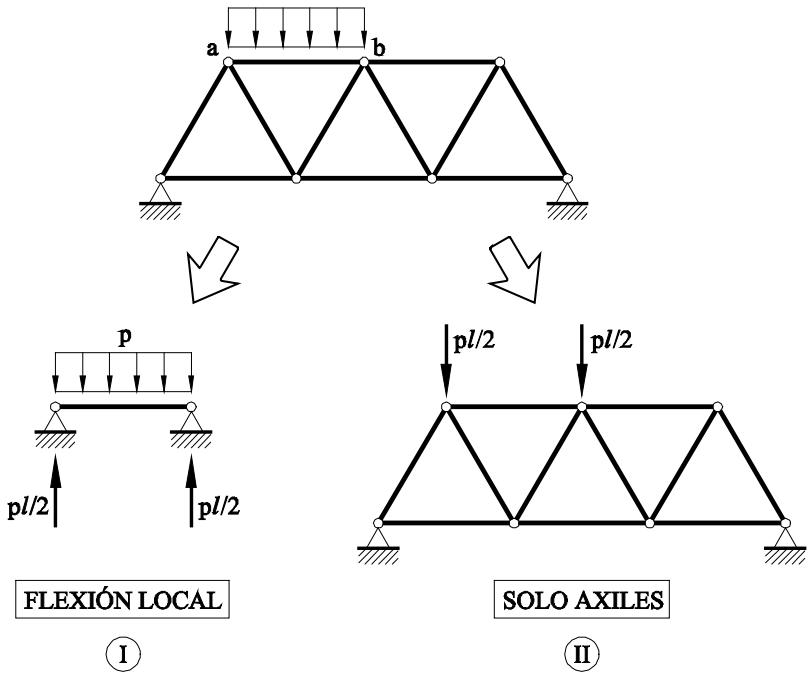


Figura 4.12: Estructura articulada plana

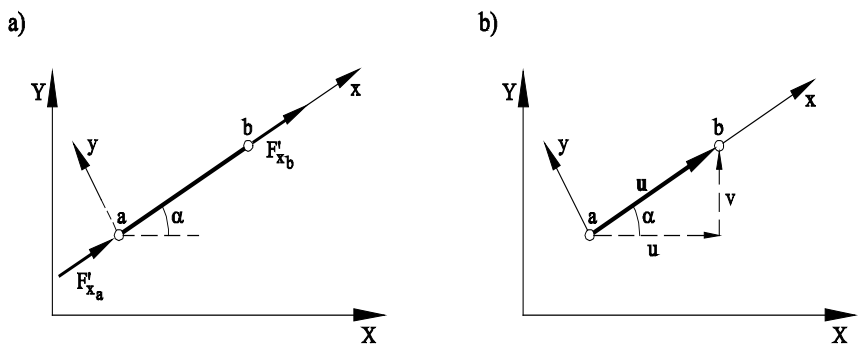


Figura 4.13: Pieza de estructura articulada plana

Las ecuaciones elásticas de las piezas, teniendo en cuenta que sólo actúa el esfuerzo axil, pueden escribirse, en coordenadas locales:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_a \\ u'_b \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

La matriz de transformación **T**, entre el eje local *x* y los ejes globales (*X,Y*), es

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ S \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Por tanto, puede escribirse:

$$\mathbf{f_a} = \begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \end{bmatrix} = \mathbf{T}F'_{xa} \quad ; \quad \mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}F'_{xb}$$

$$\mathbf{d_a} = \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \end{bmatrix} = \mathbf{T}u'_a \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}u'_b \tag{4.17}$$

Obsérvese, que en coordenadas locales, el número de grados de libertad por nudo es igual a uno, mientras que en coordenadas globales es igual a dos.

Las ecuaciones elásticas en coordenadas globales serán, por tanto:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & +\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

donde

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} C^2 & SC \\ SC & S^2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Con estas expresiones se puede realizar el cálculo matricial de las estructuras articuladas planas. El procedimiento de ensamblaje, imposición de las condiciones de apoyo, resolución y cálculo de esfuerzos y reacciones es análogo al indicado para estructuras reticuladas planas. A continuación se resuelven, a modo de ejemplo, algunas estructuras articuladas planas mediante el método de rigidez.

Ejemplo 4.4.1

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 4.14a bajo las cargas que se indica. La rigidez a axil *EA* de las barras es constante.
Datos: l = 5 m ; A= 15 cm^2 ; E = 200 GPa· ; H=150 kN y V=120 kN.

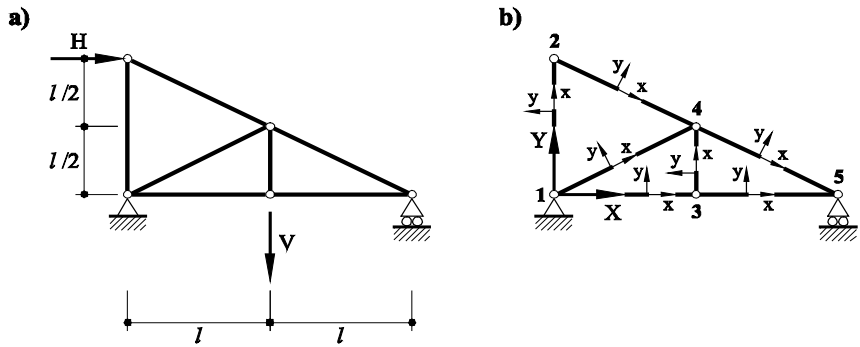


Figura 4.14: Ejemplo 4.4.1: Geometría y numeración de nudos

La estructura es articulada plana dado que las directrices de las barras están situadas en el plano XY. La resolución comienza por la numeración de los nudos y de las barras. En la Figura 4.14b, se muestra la numeración elegida, así como, el sistema de referencia global y los correspondientes sistemas locales de referencia.

A continuación, se calculan las matrices de rigidez de las barras en ejes locales. En este caso, aunque la rigidez a axil es igual para todas las barras, al variar la longitud de las mismas las matrices elementales son diferentes. A partir de la expresión general (4.15) puede escribirse:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Barras 12, 13 y 35 (l=5 m)	***Barras 14, 24 y 45*** (l= $5\sqrt{5}/2$ m)	***Barra 34*** (l=2,5 m)
$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} 10^7$	$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 5{,}37 & -5{,}37 \\ -5{,}37 & 5{,}37 \end{bmatrix} 10^7$	$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} 10^7$

La matriz de rigidez de cada pieza en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta la expresión (4.18) y (4.19), y el ángulo que forma cada barra con el sistema global, es:

$$(\mathbf{K})_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij} & -\mathbf{K}_{ij} \\ -\mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ij} \end{bmatrix}$$

Barra 12 (α=90º)	***Barras 13 y 35*** (α=0º)	***Barra 14*** (α=26,57º)
$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} 10^7$	$\mathbf{K}_{13/35} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 10^7$	$\mathbf{K}_{14} = \begin{bmatrix} 4{,}29 & 2{,}15 \\ 2{,}15 & 4{,}29 \end{bmatrix} 10^7$

Barras 24 y 45 (α=-26,57º)	***Barra 34*** (α=90º)
$\mathbf{K}_{24/45} = \begin{bmatrix} 4{,}29 & -2{,}15 \\ -2{,}15 & 4{,}29 \end{bmatrix} 10^7$	$\mathbf{K}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} 10^7$

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene realizando el proceso de ensamblaje:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \mathbf{f}_3\\ \mathbf{f}_4\\ \mathbf{f}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{12}+\mathbf{K}_{13}+\mathbf{K}_{14} & -\mathbf{K}_{12} & -\mathbf{K}_{13} & -\mathbf{K}_{14} & 0\\ -\mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{12}+\mathbf{K}_{24} & 0 & -\mathbf{K}_{24} & 0\\ -\mathbf{K}_{13} & 0 & \mathbf{K}_{13}+\mathbf{K}_{34}+\mathbf{K}_{35} & -\mathbf{K}_{34} & -\mathbf{K}_{35}\\ -\mathbf{K}_{13} & -\mathbf{K}_{24} & -\mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{14}+\mathbf{K}_{24}+\mathbf{K}_{34}+\mathbf{K}_{45} & -\mathbf{K}_{45}\\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_{35} & -\mathbf{K}_{45} & \mathbf{K}_{35}+\mathbf{K}_{45}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_1\\ \mathbf{d}_2\\ \mathbf{d}_3\\ \mathbf{d}_4\\ \mathbf{d}_5\end{bmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, en este caso, apoyo fijo en el nudo 1 y apoyo simple en el nudo 5, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad prescritos (1,2 y 10), y el sistema de ecuaciones reducido que permite obtener los movimientos incógnita es el siguiente:

$$\begin{aligned}(4{,}296\,u_2-2{,}148\,v_2+0\,u_3+0\,v_3-4{,}296\,u_4+2{,}148\,v_4+0\,u_5)10^4 &= 150\\ (-2{,}148\,u_2+7{,}074\,v_2+0\,u_3+0\,v_3+2{,}148\,u_4-1{,}074\,v_4+0\,u_5)10^4 &= 0\\ (0\,u_2+0\,v_2+12\,u_3+0\,v_3+0\,u_4+0\,v_4-6\,u_5)10^4 &= 0\\ (0\,u_2+0\,v_2+0\,u_3+12\,v_3+0\,u_4-12\,v_4+0u_5)10^4 &= -120\\ (-4{,}296\,u_2+2{,}148\,v_2+0\,u_3+0\,v_3+12{,}888\,u_4-2{,}148\,v_4-4{,}296\,u_5)10^4 &= 0\\ (2{,}148\,u_2-1{,}074\,v_2+0\,u_3-12\,v_3-2{,}148\,u_4+15{,}222\,v_4+2{,}148\,u_5)10^4 &= 0\\ (0\,u_2+0\,v_2-6\,u_3+0\,v_3-4{,}296\,u_4+2{,}148v_4+10{,}296\,u_5)10^4 &= 0\end{aligned}$$

La solución del sistema anterior permite obtener:

$$\begin{bmatrix}u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\\ u_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}194{,}0\\ 12{,}5\\ 45{,}0\\ -191{,}0\\ 62{,}5\\ -181{,}0\\ 90{,}0\end{bmatrix}\cdot 10^{-4}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros.

Cálculo de las reacciones

De forma análoga a lo realizado en ejemplos anteriores, partiendo del sistema completo de ecuaciones, se calculan las reacciones en los nudos con movimientos prescritos, nudos 1, y 5. Por ejemplo, si se aplica

la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción F_{x1} en el nudo 1, puede escribirse:

$$F_{x1} = \sum_{j=1}^{10} K_{1j}\, d_j = -6\,u_3 - 4{,}296\,u_4 - 2{,}148\,v_4 = -150 \text{ kN} \qquad (\leftarrow)$$

Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ -15 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_5 = \begin{bmatrix} F_{x5} \\ F_{y5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 135 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresa en kN.

Cálculo de los esfuerzos en las barras

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2, que aplicadas a una estructura articulada plana, resultan:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

luego:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} (\cos\alpha\, u_a + \sin\alpha\, v_a) - (\cos\alpha\, u_b + \sin\alpha\, v_b) \\ -(\cos\alpha\, u_a + \sin\alpha\, v_a) + (\cos\alpha\, u_b + \sin\alpha\, v_b) \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión anterior al cálculo de los esfuerzos en los extremos de la barra 12, teniendo en cuenta que α=90º y $\mathbf{d}_1$=0 (u_a=v_a=0), se obtiene:

$$F'_{x1} = -\frac{EA}{l} v_2 = -75 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

$$F'_{x2} = +\frac{EA}{l} v_2 = +75 \text{ kN} \quad (\uparrow)$$

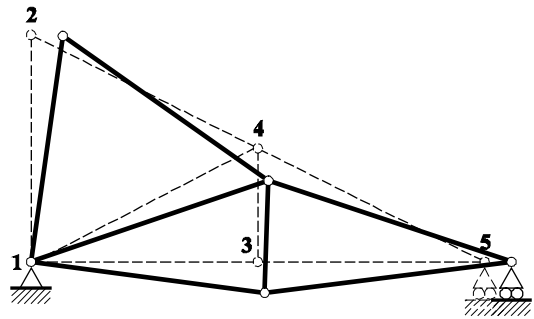


Figura 4.15: Deformada de la estructura del Ejemplo 4.4.1

Nótese que la barra 12 está traccionada. Repitiendo el procedimiento para las barras restantes se tiene:

$$\mathbf{f}'_{12}=\begin{bmatrix}-75\\+75\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}'_{13}=\begin{bmatrix}-270\\+270\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}'_{14}=\begin{bmatrix}+134\\-134\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}'_{24}=\begin{bmatrix}+168\\-168\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}'_{34}=\begin{bmatrix}-120\\+120\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}'_{35}=\begin{bmatrix}-270\\+270\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}'_{45}=\begin{bmatrix}+302\\-302\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN. En la Figura 4.15 puede verse la deformada de la estructura.

4.5. ESTRUCTURAS ARTICULADAS ESPACIALES

Las estructuras articuladas espaciales (Figura 4.16) pueden analizarse extendiendo las expresiones obtenidas en el apartado anterior. Las ecuaciones elásticas pueden escribirse, en coordenadas locales (Figura 4.17):

$$\begin{bmatrix}F'_{xa}\\F'_{xb}\end{bmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u'_a\\u'_b\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

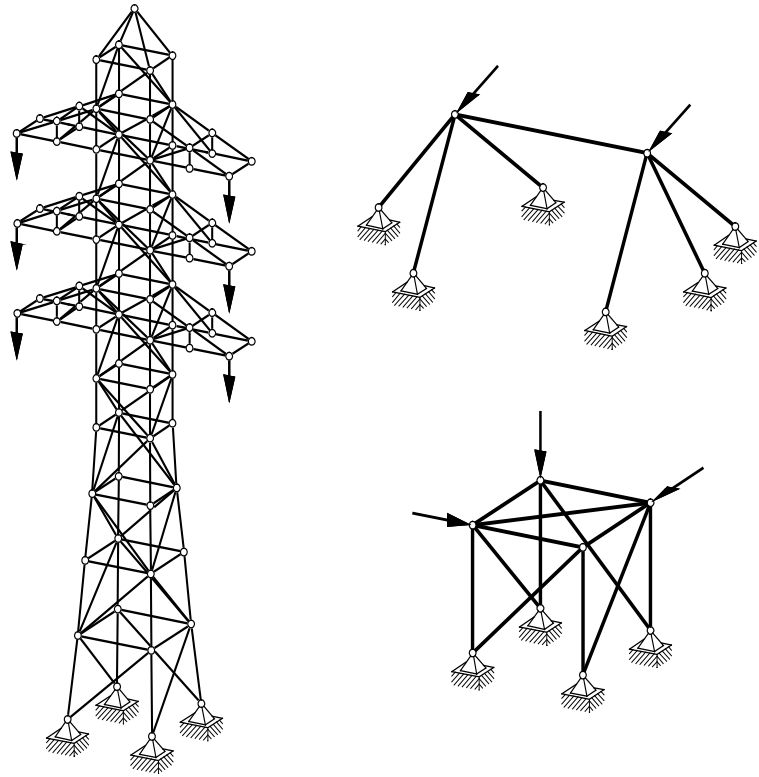


Figura 4.16: Estructuras articuladas espaciales

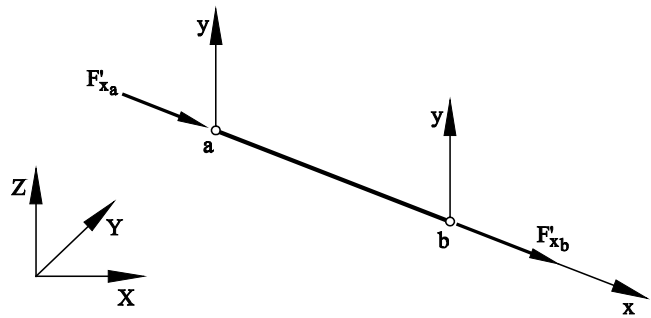


Figura 4.17: Pieza de estructura articulada espacial

Para una pieza orientada en el espacio de tal forma que sus cosenos directores respecto a los ejes globales (*X,Y,Z*) sean ($\hat{l}, \hat{m}, \hat{n}$), la matriz de transformación es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} Xx \\ Yy \\ Zz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Los vectores de fuerzas y movimientos en el sistema global, en este caso, se definen:

$$\begin{aligned} \mathbf{f_a} &= \begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \end{bmatrix} = \mathbf{T}F'_{xa} \quad ; \quad \mathbf{f}_b = \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}F'_{xb} \\ \mathbf{d_a} &= \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \end{bmatrix} = \mathbf{T}u'_a \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{bmatrix} = \mathbf{T}u'_b \end{aligned} \tag{4.22}$$

Las ecuaciones elásticas en el sistema global son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & +\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

donde

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \hat{l}^2 & \hat{l}\hat{m} & \hat{l}\,\hat{n} \\ \hat{m}\hat{l} & \hat{m}^2 & \hat{m}\hat{n} \\ \hat{n}\hat{l} & \hat{n}\hat{m} & \hat{n}^2 \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Con estas expresiones se puede realizar el cálculo matricial de las estructuras articuladas espaciales.

El procedimiento de ensamblaje, la imposición de las condiciones de apoyo, la resolución y el cálculo de esfuerzos y las reacciones es análogo al indicado para las estructuras anteriores.

Se resuelven, a continuación, algunos ejemplos.

Ejemplo 4.5.1

Aplicando el Método de Rigidez, resolver la estructura de la Figura 4.18a bajo la carga que se indica, de componentes F_x=-250 kN, F_y=-150 kN, F_z=-300 kN. La rigidez a axil *EA* de las barras es constante.

Datos: *a*= 6 m ; *A*= 20 cm^2 ; *E* = 200 GPa·

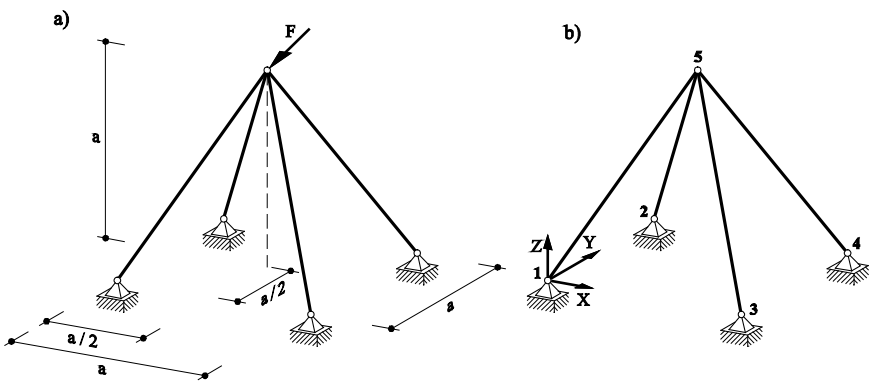


Figura 4.18: Estructura del Ejemplo 4.5.1. Geometría y numeración de nudos

La estructura es articulada espacial, la resolución comienza por la numeración de los nudos y de las barras. En la Figura 4.18b, se muestra la numeración de los nudos elegida y el sistema de referencia global.

A continuación, se calculan las matrices de rigidez de las barras en ejes locales. Las barras tienen la misma longitud y rigidez a axil constante, por tanto la matriz de rigidez elemental en el sistema local es idéntica para todas ellas y puede escribirse a partir de la expresión (4.20):

$$\mathbf{K}' = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,44 & -5,44 \\ -5,44 & 5,44 \end{bmatrix} 10^7$$

donde *l*= 7,348 m es la longitud de las barras y *EA* = 40 x10^7 N es la rigidez a axil de las mismas.

La matriz de rigidez de cada barra en el sistema global de referencia, teniendo en cuenta la expresión (4.23) y los cosenos directores respectivos, tiene la expresión siguiente:

Barra 15:

La matriz de transformación de coordenadas ***T*** de la barra 15 es igual a:

$$\mathbf{T}_{15} = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ 0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez de la barra en el sistema global es:

$$(\mathbf{K})_{15} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{15} & -\mathbf{K}_{15} \\ -\mathbf{K}_{15} & \mathbf{K}_{15} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{K}_{15} = \mathbf{T}_{15}\, \mathbf{K}'_{15}\, \mathbf{T}_{15}^{T} = \begin{bmatrix} 9,07 & 9,07 & 18,1 \\ 9,07 & 9,07 & 18,1 \\ 18,1 & 18,1 & 36,3 \end{bmatrix} 10^6$$

Repitiendo el procedimiento para las barras restantes se obtiene:

Barra 25	***Barra 35***	***Barra 45***
$\mathbf{T}_{25} = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4082 \\ -0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix}$	$\mathbf{T}_{35} = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4082 \\ 0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix}$	$\mathbf{T}_{45} = \begin{bmatrix} \hat{l} \\ \hat{m} \\ \hat{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4082 \\ -0,4082 \\ 0,8160 \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_{25} = \begin{bmatrix} 9,07 & -9,07 & 18,1 \\ -9,07 & 9,07 & -18,1 \\ 18,1 & -18,1 & 36,3 \end{bmatrix} 10^6$	$\mathbf{K}_{35} = \begin{bmatrix} 9,07 & -9,07 & -18,1 \\ -9,07 & 9,07 & 18,1 \\ -18,1 & 18,1 & 36,3 \end{bmatrix} 10^6$	$\mathbf{K}_{45} = \begin{bmatrix} 9,07 & 9,07 & -18,1 \\ 9,07 & 9,07 & -18,1 \\ -18,1 & -18,1 & 36,3 \end{bmatrix} 10^6$

La matriz de rigidez global de la estructura se obtiene realizando el proceso de ensamblaje:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \mathbf{f}_3\\ \mathbf{f}_4\\ \mathbf{f}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{15} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{15}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{25} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{25}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{35} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{35}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{45} & -\mathbf{K}_{45}\\ -\mathbf{K}_{15} & -\mathbf{K}_{25} & -\mathbf{K}_{35} & -\mathbf{K}_{45} & \mathbf{K}_{15}+\mathbf{K}_{25}+\mathbf{K}_{35}+\mathbf{K}_{45}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_1\\ \mathbf{d}_2\\ \mathbf{d}_3\\ \mathbf{d}_4\\ \mathbf{d}_5\end{bmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, en este caso, apoyo fijo en los nudos 1 al 4, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad prescritos (1 al 12), y el sistema de ecuaciones reducido que permite obtener los movimientos incógnita es el siguiente:

$$\mathbf{f}_5=\left(\mathbf{K}_{15}+\mathbf{K}_{25}+\mathbf{K}_{35}+\mathbf{K}_{45}\right)\mathbf{d}_5$$

que en forma matricial se expresa por:

$$\begin{bmatrix}-250\\ -150\\ -300\end{bmatrix}10^3=\begin{bmatrix}36{,}28 & 0 & 0\\ 0 & 36{,}28 & 0\\ 0 & 0 & 36{,}28\end{bmatrix}10^6\begin{bmatrix}u_5\\ v_5\\ w_5\end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones resultante es desacoplado y la solución permite obtener el valor de los movimientos incógnita:

$$\mathbf{d}_5=\begin{bmatrix}u_5\\ v_5\\ w_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6{,}89\\ -4{,}13\\ -2{,}07\end{bmatrix}10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros.

Cálculo de las reacciones

De forma análoga a lo realizado en ejemplos anteriores, partiendo del sistema completo de ecuaciones, se calculan las reacciones en los nudos con movimientos prescritos, nudos 1 al 4. Por ejemplo, si se aplica la ecuación (3.20) al cálculo de la reacción F_{x1} en el nudo 1, puede escribirse:

$$F_{x1}=\sum_{j=1}^{15}K_{1j}\,d_j=\left(-9{,}07\times10^6\right)u_5+\left(-9{,}07\times10^6\right)v_5+\left(-18{,}1\times10^6\right)w_5$$
$$=137{,}418\ \text{kN}$$

Repitiendo el procedimiento para las reacciones restantes, se obtiene:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137{,}4 \\ 137{,}4 \\ 275 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62{,}5 \\ -62{,}5 \\ 125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12{,}4 \\ -12{,}4 \\ 25 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ F_{z4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62{,}5 \\ 62{,}5 \\ -125 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresa en kN.

Cálculo de los esfuerzos en las barras

Los esfuerzos en los extremos de las barras se calculan a partir de los movimientos mediante las ecuaciones (2.24) del Capítulo 2, que aplicadas a una estructura articulada espacial, resultan:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{d}_b \end{bmatrix}$$

con:

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \hat{l} & \hat{m} & \hat{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{l} & \hat{m} & \hat{n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

luego:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{xb} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{l}\, u_a + \hat{m}\, v_a + \hat{n}\, w_a \\ \hat{l}\, u_b + \hat{m}\, v_b + \hat{n}\, w_b \end{bmatrix}$$

Aplicando la expresión anterior al cálculo de los esfuerzos en los extremos de la barra 15, teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1$=0 ($u_a = v_a = w_a$=0), se obtiene:

$$\mathbf{f}'_{15} = \begin{bmatrix} F'_{x1} \\ F'_{x5} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -\left(\hat{l}u_5 + \hat{m}v_5 + \hat{n}w_5\right) \\ \left(\hat{l}u_5 + \hat{m}v_5 + \hat{n}w_5\right) \end{bmatrix}$$

$$= 5{,}44 \times 10^7 \begin{bmatrix} -\left(0{,}4082u_5 + 0{,}4082v_5 + 0{,}816w_5\right) \\ \left(0{,}4082u_5 + 0{,}4082v_5 + 0{,}816w_5\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 337 \\ -337 \end{bmatrix}$$

Repitiendo el procedimiento para las barras restantes se tiene:

$$\mathbf{f}'_{25} = \begin{bmatrix} 153 \\ -153 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_{35} = \begin{bmatrix} 30{,}6 \\ -30{,}6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}'_{45} = \begin{bmatrix} -153 \\ 153 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN.

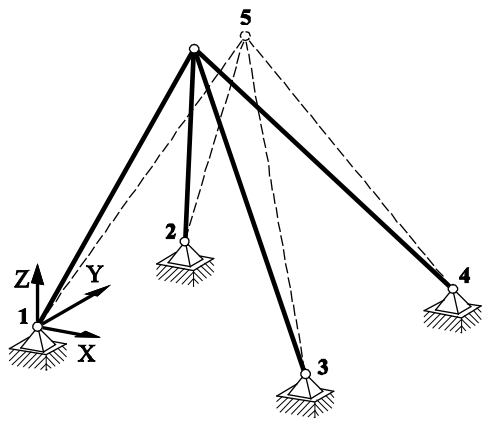


Figura 4.19: Deformada de la estructura del Ejemplo 4.5.1

Nótese que las barras 15,25 y 35 están comprimidas y la barra 45 está traccionada. En la Figura 4.19 puede verse la deformada de la estructura.

Capítulo 5

MATRICES DE RIGIDEZ, FLEXIBILIDAD Y EQUILIBRIO

5.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se han descrito, de forma general, las bases en las que se fundamentan los métodos matriciales en su aplicación al análisis de estructuras. En todos los casos se ha supuesto que las estructuras estaban formadas por piezas rectas de sección constante y escribimos al desarrollar el método de equilibrio, la siguiente relación entre fuerzas y movimientos de una barra aislada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Los coeficientes de estas submatrices $\mathbf{K}'$, se determinaron con facilidad a partir de las soluciones conocidas para el esfuerzo axil, la flexión, etc., sin necesidad de considerar ninguna ecuación diferencial.

En este capítulo, se desarrollará una formulación diferente en función del vector deformación, **e,** definido como el movimiento relativo entre los extremos *a* y *b* de una pieza aislada. Esta forma de analizar el problema presenta dos ventajas: en primer lugar, proporciona generalidad al análisis porque permite obtener las matrices de rigidez de una barra, aún siendo curva y/o de inercia variable, a partir de una matriz de flexibilidad **F**´ y de una matriz de equilibrio **H**´. Esta última, es muy sencilla e independiente de las características elásticas de las barras. En segundo lugar, es el punto de partida del método de compatibilidad y abre el camino para el uso de las matrices de transferencia.

5.2. ECUACIONES DE EQULIBRIO Y DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones (5.1) como se ha visto en el apartado (2.7) son singulares porque una pieza aislada puede sufrir un pequeño movimiento arbitrario sin que se modifiquen las fuerzas y momentos aplicados en sus extremos (Figura 5.1).

Refiriendo las fuerzas actuantes en los extremos de la pieza al sistema local de referencia de la misma (Figura 5.1) y planteando las condiciones de equilibrio puede escribirse:

$$\begin{aligned} F'_{xa}+F'_{xb}&=0 & M'_{xa}+M'_{xb}&=0\\ F'_{ya}+F'_{yb}&=0 & M'_{ya}+M'_{yb}-F'_{zb}\,l&=0\\ F'_{za}+F'_{zb}&=0 & M'_{za}+M'_{zb}+F'_{yb}\,l&=0 \end{aligned} \qquad (5.2)$$

que expresadas en forma matricial resultan:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa}\\ F'_{ya}\\ F'_{za}\\ M'_{xa}\\ M'_{ya}\\ M'_{za} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -l & 0 & 1 & 0\\ 0 & l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xb}\\ F'_{yb}\\ F'_{zb}\\ M'_{xb}\\ M'_{yb}\\ M'_{zb} \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

o en forma más compacta:

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}'_a+\mathbf{H}'\,\mathbf{f}'_b=0\\ \text{o bien}\quad &\mathbf{H}'^{-1}\,\mathbf{f}'_a+\mathbf{f}'_b=0 \end{aligned} \qquad (5.4)$$

La matriz $\mathbf{H}'$, se llama *matriz de equilibrio* de la pieza y teniendo en cuenta la hipótesis de los pequeños movimientos es independiente de las características elásticas de la barra, sólo es función de la posición relativa de sus extremos.

La matriz de equilibrio de la barra $\mathbf{H}'$ puede referirse al sistema de referencia global (X, Y, Z) multiplicando por la matriz de cambio de ejes.

$$\mathbf{T}\,\mathbf{f}'_a+\mathbf{T}\,\mathbf{H}'\,\mathbf{T}^T\,\mathbf{f}'_b=0 \qquad (5.5)$$

o de forma más compacta:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{H}\,\mathbf{f}_b = 0 \qquad \text{con} \qquad \mathbf{H} = \mathbf{T}\,\mathbf{H}'\,\mathbf{T}^T \tag{5.6}$$

Es importante destacar que cuando la pieza no es recta (Figura 5.2), no tiene sentido hablar de sistema coordenado local por la propia definición del mismo, y por tanto, las ecuaciones de equilibrio de la barra deben referirse directamente al triedro global.

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas interiores (esfuerzos en extremos de piezas) y exteriores que actúan sobre los nudos pueden escribirse, en el sistema global de referencia:

$$\begin{aligned} F_{xa} + F_{xb} &= 0 \qquad & M_{xa} + M_{xb} + F_{zb}\,l_y - F_{yb}\,l_z &= 0 \\ F_{ya} + F_{yb} &= 0 \qquad & M_{ya} + M_{yb} - F_{zb}\,l_x + F_{xb}\,l_z &= 0 \\ F_{za} + F_{zb} &= 0 \qquad & M_{za} + M_{zb} + F_{yb}\,l_x - F_{xb}\,l_y &= 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

o en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -l_z & l_y & 1 & 0 & 0 \\ l_z & 0 & -l_x & 0 & 1 & 0 \\ -l_y & l_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix} = 0 \tag{5.8}$$

que de forma más compacta se expresa por:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{H}\,\mathbf{f}_b = 0 \tag{5.9}$$

En la ecuación anterior, **H** es la matriz de equilibrio asociada a la pieza, referida al sistema coordenado global. Estas expresiones generales, permiten obtener fácilmente las ecuaciones de equilibrio y aunque hayan sido deducidas únicamente a partir de consideraciones de equilibrio tienen otra importante función, en relación con los movimientos de los extremos de la barra ante un movimiento de sólido rígido de la misma.

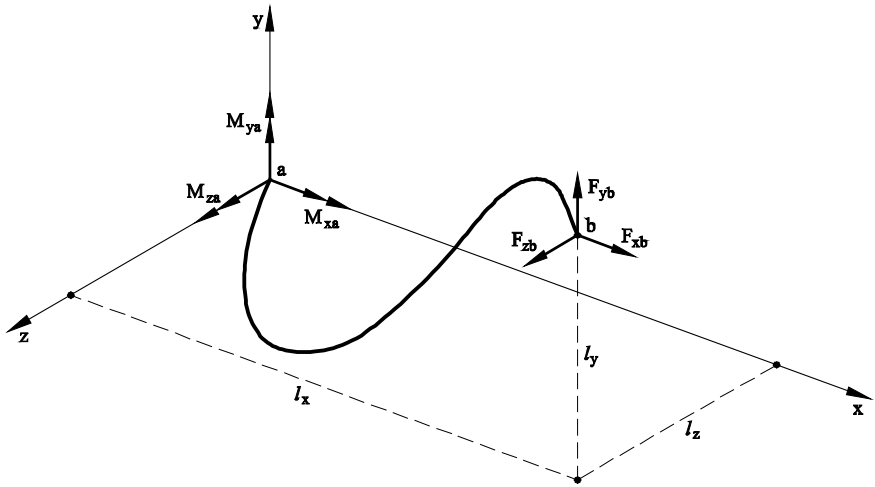


Figura 5.2: Esfuerzos en los extremos de una pieza de forma arbitraria en el espacio

Supóngase que una pieza prismática en equilibrio sufre un movimiento de sólido rígido que provoca en sus extremos *a* y *b* un movimiento $\mathbf{d}_a^*$ y $\mathbf{d}_b^*$, respectivamente (Figura 5.3).

Como la pieza está en equilibrio bajo las fuerzas que actúan en sus extremos, $\mathbf{f}_a$ y $\mathbf{f}_b$, el trabajo realizado en el movimiento por las mismas debe ser nulo, por tanto:

$$\mathbf{f}_a^T \mathbf{d}_a^* + \mathbf{f}_b^T \mathbf{d}_b^* = 0 \tag{5.10}$$

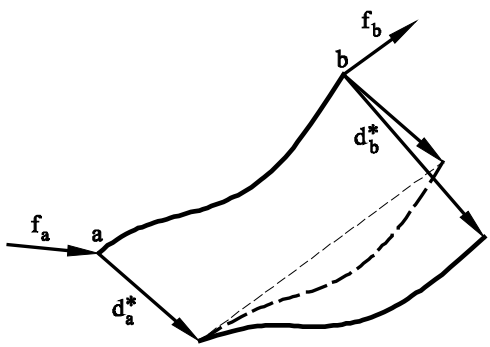


Figura 5.3: Movimiento de sólido rígido de una pieza prismática

De la ecuación (5.9) también se deduce que debe cumplirse $\mathbf{f}_a^T + \mathbf{f}_b^T \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$ y sustituyendo en (5.10) se obtiene:

$$-\mathbf{f}_b^T \mathbf{H}^T \mathbf{d}_a^* + \mathbf{f}_b^T \mathbf{d}_b^* = 0 \tag{5.11}$$

Luego:

$$\mathbf{d}_b^* = \mathbf{H}^T \mathbf{d}_a^* \tag{5.12}$$

Puede verse que la matriz de equilibrio también relaciona los movimientos de los extremos de una pieza provocados por un movimiento de sólido rígido de la misma.

5.3. MATRICES DE FLEXIBILIDAD Y DE RIGIDEZ DE UNA PIEZA PRISMÁTICA

Si se supone que el movimiento **d** de los extremos de una barra prismática de forma arbitraria se compone de un movimiento de sólido rígido más la deformación elástica producida por las acciones exteriores, las relaciones esfuerzo-desplazamiento pueden obtenerse considerando aisladamente ambos movimientos y superponiendo posteriormente los resultados.

Para determinar las relaciones movimiento-esfuerzo, se supone el extremo *a* empotrado, $\mathbf{d}_a = \mathbf{0}$ (Figura 5.4). Suponiendo que la pieza prismática tiene un comportamiento lineal puede aplicarse el Teorema de Castigliano y los movimientos relativos del extremo *b* respecto de *a*, pueden calcularse a partir de la energía de deformación *U*, expresada como una función cuadrática de las componentes de $\mathbf{f}_b$.

Derivando dicha energía respecto a cada una de las componentes de $\mathbf{f}_b$, se obtienen los movimientos de *b* que son funciones lineales de dichas componentes.

$$\begin{aligned} u_b &= \frac{\partial U}{\partial F_{xb}} & v_b &= \frac{\partial U}{\partial F_{yb}} & w_b &= \frac{\partial U}{\partial F_{zb}} \\ \phi_{xb} &= \frac{\partial U}{\partial M_{xb}} & \phi_{yb} &= \frac{\partial U}{\partial M_{yb}} & \phi_{zb} &= \frac{\partial U}{\partial M_{zb}} \end{aligned} \tag{5.13}$$

que expresadas en forma matricial resultan:

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{F}_{bb}\,\mathbf{f}_b \tag{5.14}$$

donde la matriz **F** que se denomina *matriz de flexibilidad,* es *no* s*ingular* y simétrica tal como se ha visto en el capítulo 2, por consiguiente puede invertirse y escribir:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{F}_{bb}^{-1}\,\mathbf{d}_b = \mathbf{K}_{bb}\,\mathbf{d}_b \tag{5.15}$$

En general, y en esta formulación, se suele prescindir de los subíndices, dado que sin ellos el estudio resulta más sencillo y no se introducen en la práctica desventajas. Si además se hace **e** = $\mathbf{d}_b$, de lo anterior puede escribirse:

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}\,\mathbf{f}_b \quad , \; \mathbf{f}_b = \mathbf{K}\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} \tag{5.16}$$

En base a estas relaciones, las ecuaciones de equilibrio de la barra pueden escribirse:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{H}\,\mathbf{f}_b = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{f}_a = -\mathbf{H}\,\mathbf{f}_b = -\mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{e} \tag{5.17}$$

Teniendo en cuenta que un movimiento de sólido rígido se traduce en $\mathbf{d}_a^{\,*}$ y $\mathbf{d}_b^{\,*}$, movimientos en *a* y *b* (ver Figura 5.3) y que éstos están relacionados entre sí a través de la matriz de equilibrio **H** (ecuación 5.12), los movimientos de los extremos *a* y *b* de la barra, considerando que está empotrada inicialmente en *a*, serán:

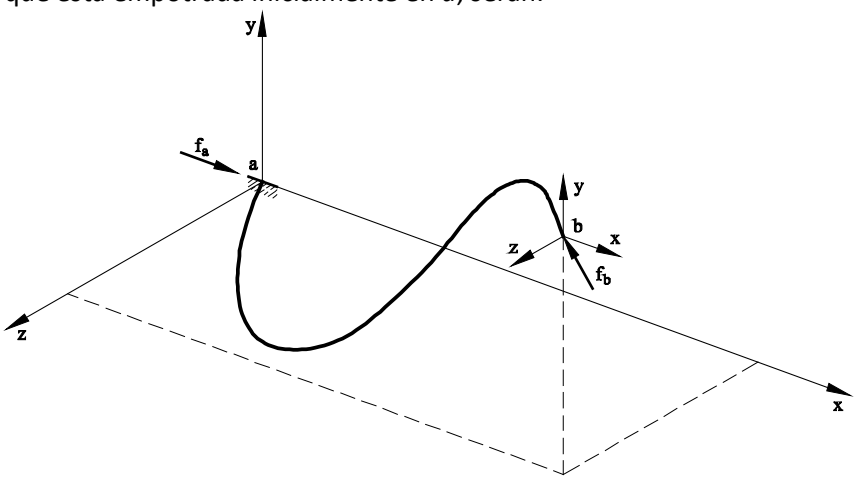


Figura 5.4: Pieza prismática espacial de forma arbitraria con extremo "a" empotrado

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a^* \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{d}_b^* + \mathbf{e} \tag{5.18}$$

De las expresiones (5.12) y (5.18) puede escribirse:

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{H}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{e} \tag{5.19}$$

Por tanto, los esfuerzos en los extremos de la barra pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{HK}\left(\mathbf{d}_b - \mathbf{H}^T \mathbf{d}_a\right) = \mathbf{HKH}^T \mathbf{d}_a - \mathbf{HKd}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{K}\left(\mathbf{d}_b - \mathbf{H}^T \mathbf{d}_a\right) = -\mathbf{KH}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{Kd}_b \end{aligned} \tag{5.20}$$

Comparando estas expresiones con las obtenidas en capítulos anteriores, se pueden escribir las siguientes relaciones fundamentales de esta formulación:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{aa} &= \mathbf{HKH}^T & \mathbf{K}_{ab} &= -\mathbf{HK} \\ \mathbf{K}_{ba} &= -\mathbf{KH}^T & \mathbf{K}_{bb} &= \mathbf{K} \end{aligned} \tag{5.21}$$

donde **K** es la matriz inversa de **F** y relaciona los movimientos en el extremo *b* de una barra cualquiera con los esfuerzos que actúan en el mismo, cuando el extremo opuesto está empotrado $\mathbf{d}_a = \mathbf{0}$.

Ejemplo 5.3.1

Aplicando los conceptos de los apartados anteriores, calcular las matrices locales de equilibrio, flexibilidad y rigidez de la barra recta de longitud *l* y de sección constante *A* (Figura 5.5). La inercia de la barra es *I* y el módulo de elasticidad del material, *E*.

La matriz de equilibrio **H** puede obtenerse a partir de las ecuaciones de equilibrio de la barra aislada (Apartado 5.2):

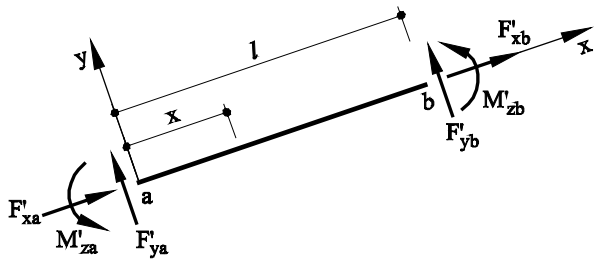


Figura 5.5: Barra recta de inercia constante

$$\begin{aligned} F'_{xa} + F'_{xb} &= 0 \\ F'_{ya} + F'_{yb} &= 0 \\ M'_{za} + M'_{zb} + F'_{yb}\, l &= 0 \end{aligned}$$

que en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_{za} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} = 0$$

o de forma más compacta:

$$\mathbf{f}'_a + \mathbf{H}' \mathbf{f}'_b = 0$$

donde **H´** es la matriz de equilibrio de la barra en coordenadas locales.

Si el sistema de referencia global no coincide con el local de la barra, para obtener la matriz de equilibrio global basta con premultiplicar **H´** por la matriz **T** de transformación de coordenadas y postmultiplicar por $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$.

La matriz de flexibilidad de la barra empotrada en un extremo, relaciona los movimientos del extremo libre con sus esfuerzos. La pieza prismática del ejemplo se supone empotrada en el extremo *a*, luego $\mathbf{d'}_a$=0. Los movimientos en el extremo opuesto *b* pueden calcularse aplicando el 2º teorema de Castigliano.

Las leyes de momentos flectores y de esfuerzo axil de la barra pueden expresarse por:

$$M_f = M'_{zb} + F'_{yb}(l - x))$$
$$N = F'_{xb}$$

La energía de deformación de la barra es igual a:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_f^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left[M'_{zb} + F'_{yb}(l-x)\right]^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(F'_{xb})^2}{EA}\,dx$$

Integrando se obtiene:

$$U = (M'_{zb})^2 \frac{l}{2EI} + (F'_{yb})^2 \frac{l^3}{6EI} + M'_{zb}\,F'_{yb}\frac{l^2}{2EI} + (F'_{xb})^2 \frac{l}{2EA}$$

y aplicando el 2º Teorema de Castigliano se obtienen los movimientos en el extremo *b* de la pieza:

$$u'_b = \frac{\partial U}{\partial F'_{xb}} = F'_{xb}\frac{l}{EA}$$
$$v'_b = \frac{\partial U}{F'_{yb}} = F'_{yb}\frac{l^3}{3EI} + M'_{zb}\frac{l^2}{2EI}$$
$$\phi'_b = \frac{\partial U}{\partial M'_{zb}} = M'_{zb}\frac{l}{EI} + F'_{yb}\frac{l^2}{2EI}$$

Las expresiones anteriores en forma matricial pueden escribirse como:

$$\mathbf{e}'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

que en forma más compacta es:

$$\mathbf{e}'_b = \mathbf{F}'_{bb}\mathbf{f}'_b$$

donde $\mathbf{F'}_{bb}$ es la matriz de flexibilidad de la barra en coordenadas locales. Invirtiendo la matriz $\mathbf{F'}_{bb}$, se obtiene la matriz $\mathbf{K'}_{bb}$ de la barra que coincide con la calculada en el Apartado 2.6 del Capítulo 2:

$$\mathbf{K}'_{bb} = \mathbf{F}'^{-1}_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

A partir de $\mathbf{H'}$ y de $\mathbf{K'}_{bb}$, teniendo en cuenta las relaciones de la ecuación (5.21) fácilmente pueden deducirse las submatrices de rigidez locales restantes. Así, por ejemplo, la submatriz $\mathbf{K'}_{ab}$ resulta igual a:

$$\mathbf{K}'_{ab} = -\mathbf{H}'\mathbf{K}' = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

Nótese que la expresión de $\mathbf{K'}_{ab}$ coincide con la obtenida a partir de las ecuaciones elásticas (Apartado 2.6).

Si el extremo empotrado de la barra fuese el *b*, entonces $\mathbf{d'}_b = 0$ y $\mathbf{d'}_a = \mathbf{e'}_a$, y las relaciones esfuerzo-desplazamiento pueden escribirse de la forma:

$$\mathbf{f}'_a = \mathbf{H}'\mathbf{K}'\mathbf{H}'^T\mathbf{e}'_a$$
$$\mathbf{f}_b = -\mathbf{K}'\mathbf{H}'^T\mathbf{e}'_a$$

Siendo

$$\mathbf{e}'_a = \mathbf{F}'_{aa}\,\mathbf{f}'_a \qquad \mathbf{f}'_a = \mathbf{K}'_{aa}\,\mathbf{e}'_a \qquad \mathbf{F}'_{aa} = \mathbf{K}'^{-1}_{aa}$$

Por tanto, la matriz de flexibilidad asociada al extremo *a* es:

$$\mathbf{F}'_{aa} = \left(\mathbf{H}'^{-1}\right)^T \mathbf{K}'^{-1}\mathbf{H}'^{-1} = \left(\mathbf{H}'^{-1}\right)^T \mathbf{F}'\,\mathbf{H}'^{-1}$$

5.4. APLICACIONES

El enfoque del cálculo matricial, desarrollado en este capítulo, permite considerar con mayor facilidad algunas hipótesis de comportamiento estructural complejo. A modo de ejemplo se explica su aplicación al análisis de una barra bajo efectos térmicos, a continuación, al caso de una barra de inercia variable y finalmente se estudia la influencia del cortante en la deformación de una pieza prismática.

5.4.1. Efectos Térmicos

El planteamiento matricial anterior (Apartado 5.3) permite introducir los efectos térmicos de una forma más simple que la que resultaría aplicando directamente el método de rigidez expuesto en el capítulo 3. Si en el extremo *b* de la barra (Figura 5.4) existe una deformación térmica adicional, $\mathbf{e}_t$, las relaciones fuerza-desplazamiento de la misma pueden expresarse por:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{K}\left(\mathbf{e} \pm \mathbf{e}_t\right) \tag{5.22}$$

y siguiendo un proceso análogo al realizado en dicho apartado, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{H}\mathbf{K}\left(\mathbf{d}_b - \mathbf{H}^T\mathbf{d}_a\right) = \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{H}^T\mathbf{d}_a - \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{K}\left(\mathbf{d}_b - \mathbf{H}^T\mathbf{d}_a\right) = -\mathbf{K}\mathbf{H}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{K}\mathbf{d}_b \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ejemplo 5.4.1.1

La viga recta de la Figura 5.6, de longitud l tiene una rigidez a flexión y axil, *EI* y *EA*, respectivamente. Si α es el coeficiente de dilatación térmica de la misma, se pide determinar el efecto producido por un incremento uniforme de temperatura Δt.

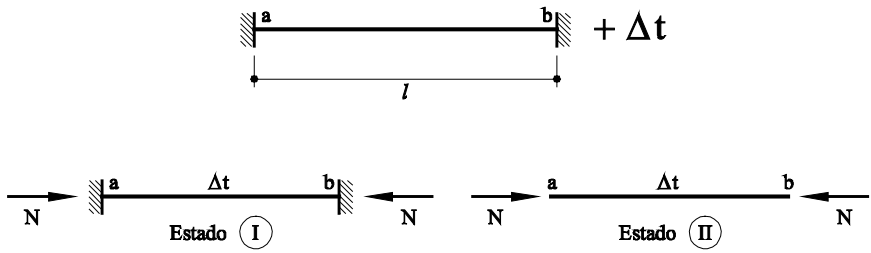


Figura 5.6: Viga recta biempotrada con un incremento uniforme de temperatura

(a)Método de rigidez

La variación térmica puede tratarse como una acción exterior que actúa sobre la barra y que provoca unos esfuerzos de empotramiento y por tanto unas fuerzas que actúan sobre los nudos de la misma.

La determinación del vector de fuerzas debe determinarse previamente de forma analítica (ver Sección 2.5). Si la variación térmica es uniforme, el alargamiento que sufre la barra es igual a la dilatación de la misma por incremento de temperatura:

$$\frac{N\,l}{EA} = l\,\alpha\,\Delta t$$

Por tanto las reacciones de empotramiento perfecto en el *estado I* y las cargas actuantes en los nudos en el *estado II* son:

$$\mathbf{f}_I = \begin{bmatrix} EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f}_{II} = \begin{bmatrix} -EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si en el *estado II* se supone el extremo *a* de la viga empotrado $\mathbf{d}_a$=0 puede escribirse:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{K}_{bb}\mathbf{d}_b$$

$$\begin{bmatrix} EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

(b)Utilizando la matriz de flexibilidad.

Una forma alternativa de resolver el problema consiste en expresar el vector de movimientos del extremo 2 de la viga, en función de la matriz de flexibilidad:

$$\mathbf{e} - \mathbf{e}_t = \mathbf{F}\,\mathbf{f}_b$$

Si se considera sólo el efecto térmico puede escribirse:

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{e}_t = \mathbf{K}_{bb}\,\mathbf{e}_t$$

donde $\mathbf{e}_t = [\, l\,\alpha\,\Delta t \quad 0 \quad 0\,]^T$, por tanto:

$$\begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA\alpha\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5.4.2. Barra de inercia variable

Supóngase la pieza prismática recta de la Figura 5.7, de inercia variable y longitud *l*. La determinación de la matriz de flexibilidad, aplicando los conceptos introducidos en este capítulo, comienza suponiendo uno de los extremos empotrado y calculando los movimientos en el extremo opuesto. Si el extremo empotrado es el *a*, entonces $\mathbf{d}'_a$ =0. Los movimientos en el extremo opuesto *b* pueden calcularse aplicando el 2º teorema de Castigliano. Las leyes de momentos y de esfuerzo axil de la barra son:

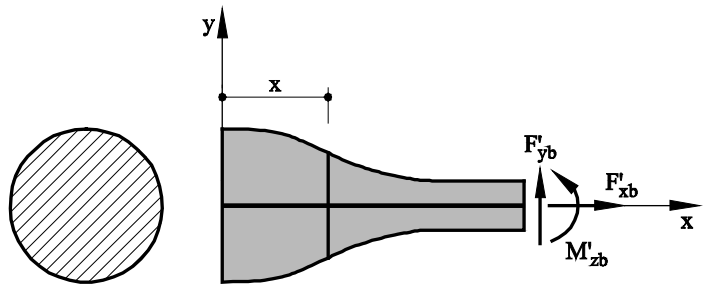


Figura 5.7: Barra recta de inercia variable

$$\begin{aligned} M_f &= M'_{zb} + F'_{yb}\left(l - x\right) \\ N &= F'_{xb} \end{aligned} \tag{5.24}$$

La energía de deformación de la barra es igual a:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_f^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left[M'_{zb} + F'_{yb}\left(l-x\right)\right]^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left(F'_{xb}\right)^2}{EA}\,dx \tag{5.25}$$

Llamando:

$$u_0 = \int_0^l \frac{1}{EI}\,dx \;\;;\;\; u_1 = \int_0^l \frac{x}{EI}\,dx \;;\; u_2 = \int_0^l \frac{x^2}{EI}\,dx \quad \text{y} \quad v_0 = \int_0^l \frac{1}{EA}\,dx \tag{5.26}$$

La energía de deformación *U* de la barra puede escribirse como una función cuadrática de las fuerzas en la forma:

$$U = \frac{1}{2}M'^2_{zb}\,u_0 + \frac{1}{2}F'^2_{yb}\left(l^2u_0 - 2lu_1 + u_2\right) + M'_{zb}\,F'_{yb}\left(lu_0 - u_1\right) + \frac{1}{2}F'^2_{xb}\,v_0 \tag{5.27}$$

Aplicando el 2º teorema de Castigliano, los movimientos en el extremo *b* de la pieza resultan:

$$\begin{aligned} u'_b &= v_0\,F'_{xb} \\ v'_b &= \left(l^2u_0 - 2lu_1 + u_2\right)F'_{yb} + \left(lu_0 - u_1\right)M'_{zb} \\ \phi'_{zb} &= u_0M'_{zb} + \left(lu_0 - u_1\right)F'_{yb} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Relaciones que expresadas en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & lu_0 - 2lu_1 + u_2 & lu_1 - u_0 \\ 0 & lu_1 - u_0 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

o en forma más compacta:

$$\mathbf{e}'_b = \mathbf{F}'_{bb}\, \mathbf{f}'_{bb} \tag{5.30}$$

Resolviendo las integrales de u_0, u_1, u_2 y v_0, considerando que el área, la inercia y el módulo de elasticidad para cada sección son funciones de la variable *x*, se obtiene la matriz de flexibilidad de la pieza, supuesta empotrada en *a*.

Invirtiendo la matriz de flexibilidad de la barra se obtiene la submatriz de rigidez $\mathbf{K'}_{bb}$ y a partir de ella y de la matriz de equilibrio $\mathbf{H'}$, las submatricies de rigidez $\mathbf{K'}_{ij}$ (ver ecuación (5.21).

Por otra parte, para obtener las matrices anteriores referidas al sistema global, basta con premultiplicar por la matriz de transformación de coordenadas y postmultiplicar por su traspuesta.

5.4.3. Intervención del cortante en la deformación

En el desarrollo del método matricial explicado hasta aquí, únicamente se ha considerado la deformación de la pieza prismática por flexión y por axil. En algunos casos puede ser importante también tener en cuenta la deformación por esfuerzo cortante.

Supóngase, por ejemplo, que se desean determinar las matrices de flexibilidad y rigidez de una viga recta de inercia constante y longitud *l,* teniendo en cuenta la deformación por flector, axil y cortante (Figura 5.8). Las leyes de esfuerzos de la pieza se expresan por:

$$\begin{aligned} M_f &= M'_{zb} + F'_{yb}(l - x)) \\ N &= F'_{xb} \\ Q &= F'_{yb} \end{aligned} \tag{5.31}$$

La energía de deformación de la barra, incluyendo la deformación por cortante, es igual a:

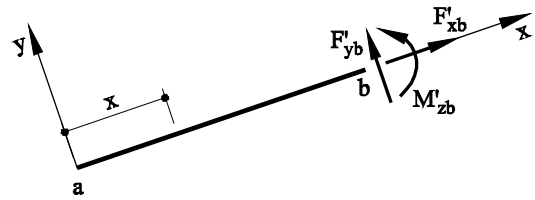


Figura 5.8: Barra recta considerando la deformación por cortante

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_f^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{Q^2}{GA*}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left[M'_{zb} + F'_{yb}(l-x)\right]^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(F'_{xb})^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{(F'_{yb})^2}{GA*}dx \quad (5.32)$$

donde *G* es el módulo de rigidez a cortante y A^* es el área reducida de cortante según el eje y.

Resolviendo se llega a la expresión cuadrática siguiente:

$$U = \frac{l}{2EI}M'^2_{zb} + \frac{l^3}{6EI}F'^2_{yb} + \frac{l^2}{2EI}M'_{zb}\,F'_{yb} + \frac{l}{2EA}F'^2_{xb} + \frac{l}{2GA*}F'^2_{yb} \quad (5.33)$$

Aplicando el teorema de Castigliano, pueden determinarse los movimientos del extremo *b*, supuesto empotrado el extremo *a*, es decir, $\mathbf{d}_a$=0:

$$u'_b = \frac{\partial U}{\partial F'_{xb}} = \frac{l}{EA}F'_{xb}$$
$$v'_b = \frac{\partial U}{F'_{yb}} = \frac{l^3}{3EI}F'_{yb} + \frac{l^2}{2EI}M'_{zb} + \frac{l}{GA*}F'_{yb} \quad (5.34)$$
$$\phi'_b = \frac{\partial U}{\partial M'_{zb}} = \frac{l}{EI}M'_{zb} + \frac{l^2}{2EI}F'_{yb}$$

Estas relaciones expresadas en forma matricial resultan:

$$\mathbf{d}'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA^*}\frac{l^2}{2EI} & \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_{zb} \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

que en forma más compacta es:

$$\mathbf{d}'_b = \mathbf{F}'_{bb}\mathbf{f}'_b \tag{5.36}$$

donde $\mathbf{F'}_{bb}$ es la matriz de flexibilidad de la barra en coordenadas locales. Invirtiendo la matriz $\mathbf{F'}_{bb}$, se obtiene la matriz $\mathbf{K'}_{bb}$.

En el caso más general, la evaluación de las matrices $\mathbf{K}_{ij}$, de una barra cualquiera, requiere calcular inicialmente las matrices **H, F** y **K** realizando posteriormente las operaciones matriciales expresadas en las ecuaciones correspondientes (ecuación (5.21).

5.5. PIEZAS FORMADAS POR ELEMENTOS CONECTADOS EN SERIE

Supóngase una pieza recta o curva de extremos *"a"= r* y *"b"= s,* formada por varios *trozos* conectados en serie (ver Figura 5.9). Utilizando el símil de muelles conectados en serie (Figura 5.10), fácilmente puede verse que la fuerza en cada uno de ellos es la misma.

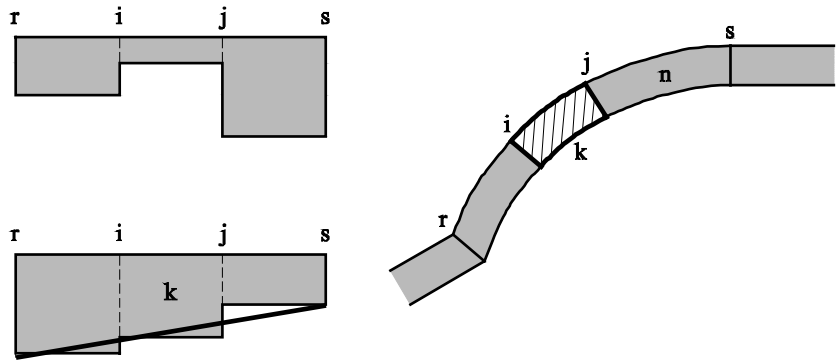


Figura 5.9: Piezas formadas por elementos conectados en serie

El alargamiento en cada muelle es igual al producto de la flexibilidad por la fuerza, y el alargamiento total es igual a la suma de los alargamientos de cada muelle.

Por tanto, si se conoce la matriz de flexibilidad **F** de cada *trozo* o *elemento* de la pieza puede calcularse la matriz de flexibilidad y la de rigidez de la pieza completa. De esta forma, se consideran como incógnitas sólo los movimientos extremos de la pieza y puede incorporarse su matriz de flexibilidad y de rigidez a cualquier estructura más compleja, como si se tratara de una barra aislada.

Las matrices **F** y **H** de cada trozo parcial de la pieza se suponen conocidas y referidas a un sistema global asociado a la misma.

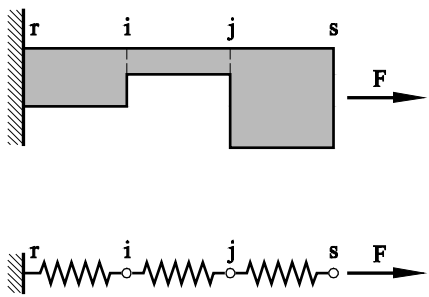


Figura 5.10: Analogía entre una pieza escalonada y los muelles conectados en serie

Si se considera empotrado el extremo *r* de la pieza, $\mathbf{d}_r = 0$, y se supone aplicada en el extremo *s* la carga $\mathbf{f}_s$, puede escribirse:

$$\mathbf{d}_s = \mathbf{e}_s = \left(\mathbf{F}_{bb}\right)_{rs} \mathbf{f}_s \tag{5.37}$$

El movimiento $\mathbf{e}_s$ del extremo *s* es la suma de los movimientos producidos por las diferentes partes, transportados rígidamente al mismo, es decir, suponiendo para cada trozo que el resto de la pieza es una prolongación rígida del elemento en cuestión.

Así, por ejemplo, si se considera el movimiento del elemento *k* (trozo con nudos extremos *i-j*), como *r* está empotrado y el trozo *r-i* se considera rígido, el extremo *i* del elemento *k* está fijo y el movimiento del nudo *j* se expresa por:

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{e}_j = \left(\mathbf{F}_{bb}\right)_k \mathbf{f}_j \tag{5.38}$$

Por equilibrio del elemento siguiente (Figura 5.11), $n \Rightarrow k+1$ se puede escribir

$$\left(\mathbf{f}_j\right)_n + \mathbf{H}_{js}\,\mathbf{f}_s = 0 \tag{5.39}$$

donde $\mathbf{H}_{js}$ es la matriz de equilibrio del elemento *n.* Por equilibrio de la sección *j*

$$\left(\mathbf{f}_j\right)_k + \left(\mathbf{f}_j\right)_n = 0 \tag{5.40}$$

Por tanto, las fuerzas aplicadas en el extremo *j* del elemento *k* pueden expresarse como:

$$\left(\mathbf{f}_j\right)_k = \mathbf{H}_{js}\mathbf{f}_s \tag{5.41}$$

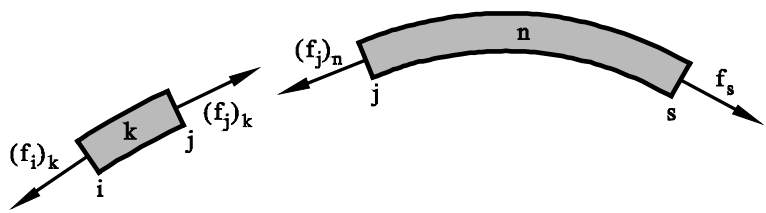


Figura 5.11: Pieza formada por elementos conectados en serie: equilibrio de cada trozo

La influencia del movimiento de la parte *k*, en el movimiento del extremo *s* de la pieza *n*, se pone de manifiesto a través de un movimiento de sólido rígido. Los movimientos de *j* y de *s* están relacionados por la matriz de equilibrio $\mathbf{H}_{js}$.

$$\left(\mathbf{d}_s\right)_k = \mathbf{H}_{js}^T\,\mathbf{d}_j = \mathbf{H}_{js}^T\left(\mathbf{F}_{bb}\right)_k\left(\mathbf{f}_j\right)_k = \mathbf{H}_{js}^T\left(\mathbf{F}_{bb}\right)_k\mathbf{H}_{js}\mathbf{f}_s \tag{5.42}$$

donde $(\mathbf{d}_s)_k$ es el movimiento en *s* debido al movimiento del extremo *j* del elemento *k* y $(\mathbf{F}_{bb})_k$ es la matriz de flexibilidad del trozo *k*. Por tanto, la contribución del elemento *k* se establece a través de una matriz de flexibilidad ficticia

$$\mathbf{F}_{kk} = \mathbf{H}_{js}^T\left(\mathbf{F}_{bb}\right)_k\mathbf{H}_{js} \tag{5.43}$$

Realizando el mismo análisis para los distintos elementos de la pieza *r-s* y superponiendo los movimientos que cada uno de ellos produce en

s, recordando que el extremo *s* coincide con el extremo *b* de dicha pieza, puede escribirse:

$$\mathbf{d}_b = \sum_k \left(\mathbf{d}_b\right)_k = \sum_j \mathbf{H}_{jb}^T \, \mathbf{F}_{jj} \, \mathbf{H}_{jb} \, \mathbf{f}_b = \mathbf{F}_{rs} \, \mathbf{f}_b \qquad (5.44)$$

donde $\mathbf{F}_{rs}$ es la matriz de flexibilidad de la pieza *r*-*s*. Puede verse de la expresión anterior que el movimiento total del extremo *b* es función de la matriz de equilibrio y de flexibilidad de cada uno de los elementos que forman la pieza.

Invirtiendo esta matriz $\mathbf{F}_{rs}$, se obtiene la matriz de rigidez $(\mathbf{K}_{bb})_{rs} = \mathbf{K}$ y utilizando las expresiones del apartado anterior, pueden calcularse las restantes submatrices de rigidez $(\mathbf{K}_{ij})_{rs}$.

Debe destacarse que este método es una herramienta muy útil para resolver problemas algo más complejos que los hasta aquí expuestos y aunque implica un conjunto de operaciones matriciales, no precisa operaciones numéricas costosas, (por ejemplo: integración para determinar la energía elástica U).

Ejemplo 5.5.1

Para la pieza de sección variable de la Figura 5.12, determinar las matrices de flexibilidad y de rigidez considerando la deformación por esfuerzo axil y por flexión. La primera parte de la pieza de longitud *l* tiene una sección de área 2*A* y de inercia 3*I*, y el segundo trozo de igual longitud tiene una sección de área *A* y de inercia *I*. Se pide la solución aplicando: (a) el Método de la Energía Elástica y (b) el Método Matricial.

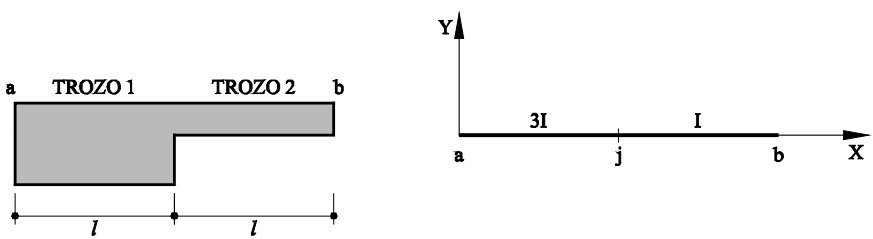


Figura 5.12: Pieza formada por elementos conectados en serie: equilibrio de cada trozo

(a) Método de la Energía Elástica

La energía de deformación de una pieza recta teniendo en cuenta la deformación por flexión y axil, como se ha visto en el Ejemplo 5.3.1 es:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_f^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}\,dx$$

Las leyes de momentos flectores y de esfuerzo axil de la barra pueden expresarse por:

$$M_f = M_{zb} + F_{yb}(2l - x))$$
$$N = F_{xb}$$

La energía de deformación de la barra es igual a:

$$U = \frac{1}{2}\left[\int_0^l \frac{\left[M_{zb} + F_{yb}(2l-x)\right]^2}{3EI}\,dx + \int_l^{2l} \frac{\left[M_{zb} + F_{yb}(2l-x)\right]^2}{EI}\,dx\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^l \frac{(F_{xb})^2}{2EA}\,dx + \int_l^{2l} \frac{(F_{xb})^2}{EA}\,dx\right]$$

Integrando se obtiene:

$$U = \frac{2l}{3EI}M_{zb}^2 + \frac{l^2}{EI}M_{zb}\,F_{yb} + \frac{5l^3}{9EI}F_{yb}^2 + + \frac{3l}{4EA}F_{xb}^2$$

y aplicando el 2º Teorema de Castigliano se obtienen los movimientos en el extremo *b* de la pieza:

$$\begin{bmatrix} u_b \\ v_b \\ \phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3l}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10l^3}{9EI} & \frac{l^2}{EI} \\ 0 & \frac{l^2}{EI} & \frac{4l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix}$$

que en forma más compacta es:

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{F}_{bb}\mathbf{f}_b$$

donde $\mathbf{F}_{bb}$ es la matriz de flexibilidad de la barra en coordenadas globales ya que en este caso coinciden las coordenadas locales y globales. Invirtiendo la matriz $\mathbf{F}_{bb}$, se obtiene la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ de la barra y aplicando las ecuaciones (5.21) se obtienen las submatrices restantes.

(b) Método Matricial

Considerando la pieza del ejemplo formada por dos elementos conectados en serie y aplicando la ecuación (5.44), se deduce que la matriz de flexibilidad de la pieza es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}_{jb}^{T}\mathbf{F}_I\mathbf{H}_{jb} + \mathbf{F}_{II}$$

siendo $\mathbf{F}_I$ y $\mathbf{F}_{II}$ las matrices de flexibilidad de los trozos I y II respectivamente y $\mathbf{H}_{jb}$ la matriz de equilibrio que relaciona el extremo *b* del trozo I (*j*) con el extremo *b* de la pieza. Teniendo en cuenta la ecuación (a) del Ejemplo 5.3.1 y la expresión de la matriz de equilibrio de una barra recta, puede escribirse:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{9EI} & \frac{l^2}{6EI} \\ 0 & \frac{l^2}{6EI} & \frac{l}{3EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3l}{2EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10l^3}{9EA} & \frac{l^2}{EI} \\ 0 & \frac{l^2}{EI} & \frac{4l}{3EI} \end{bmatrix}$$

Puede verse que la matriz de flexibilidad es idéntica a la obtenida aplicando el método de la energía elástica.

Invirtiendo la matriz **F**, se obtiene la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ de la barra:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} = \mathbf{F}_{bb}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{13l^3} & -\frac{27EI}{13l^2} \\ 0 & -\frac{27EI}{13l^2} & \frac{30EI}{13l} \end{bmatrix}$$

A partir de **H** y de **K**, teniendo en cuenta las relaciones de la ecuación (5.21) fácilmente pueden deducirse las submatrices de rigidez restantes.

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{HKH}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{13l^3} & -\frac{27EI}{13l^2} \\ 0 & -\frac{27EI}{13l^2} & \frac{30EI}{13l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{13l^3} & \frac{45EI}{13l^2} \\ 0 & \frac{45EI}{13l^2} & \frac{66EI}{13l} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T = -\mathbf{HK} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EI}{13l^3} & -\frac{27EI}{13l^2} \\ 0 & -\frac{27EI}{13l^2} & \frac{30EI}{13l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2EA}{3l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36EI}{13l^3} & \frac{27EI}{13l^2} \\ 0 & -\frac{45EI}{13l^2} & \frac{24EI}{13l} \end{bmatrix}$$

Nótese que en las dos últimas ecuaciones **H** es la matriz de equilibrio de la pieza completa.

Ejemplo 5.5.2

Determinar la matriz de rigidez de la viga circular de la Figura 5.13, suponiendo que está formada por una serie de trozos rectos y sin tener en cuenta la deformación por esfuerzo axil.
Datos: l = 12 m ; R = 8m ; $EI = 10^4$ kN·m^2.

Si se aproxima la pieza curva por medio de una poligonal de trozos rectos conectados en serie, la matriz de flexibilidad del conjunto de acuerdo a la ecuación (5.44) es igual a:

$$\mathbf{F} = \sum_n \mathbf{H}_{jb}^T \mathbf{F}_{ij} \mathbf{H}_{jb} \qquad \text{(a)}$$

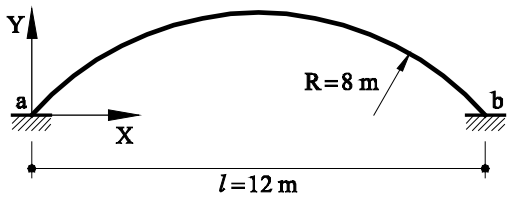


Figura 5.13: Viga circular del Ejemplo 5.5.2

donde $\mathbf{F}_{ij}$ es la matriz de flexibilidad global de cada trozo y $\mathbf{H}_{jb}$ es la matriz de equilibrio que relaciona el extremo *b* de cada trozo, representado por *j*, con el extremo *b* de la pieza circular considerada.

La matriz de flexibilidad global de una barra recta, sin considerar la deformación por esfuerzo axil es:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} S^2\dfrac{l^3}{3EI} & -SC\dfrac{l^3}{3EI} & -S\dfrac{l^2}{2EI} \\ -SC\dfrac{l^3}{3EI} & C^2\dfrac{l^3}{3EI} & C\dfrac{l^2}{2EI} \\ -S\dfrac{l^2}{2EI} & C\dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l}{EI} \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}$$

donde S y C representan el seno y el coseno del ángulo que forma la barra con el eje global X. En esta matriz se han anulado los términos afectados por 1/*EA* para despreciar la deformación por axil. Nótese que ésta es una de las ventajas del uso de las matrices de flexibilidad que no precisa alteraciones numéricas para representar estos comportamientos estructurales.

Aproximación con dos elementos rectos

Si se aproxima la pieza curva con dos elementos rectos iguales (Figura 5.14a), aplicando la expresión anterior (b) se obtiene:

$$\mathbf{F}_I = 10^{-4}\begin{bmatrix} 16{,}1 & -35{,}66 & -8{,}92 \\ -35{,}66 & 79 & 19{,}75 \\ -8{,}92 & 19{,}75 & 6{,}58 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2{,}71 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

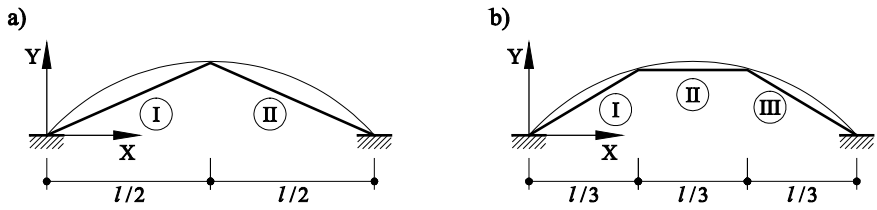


Figura 5.14: Aproximación de la viga circular: a) dos elementos rectos; b) tres elementos rectos.

$$\mathbf{F}_{II} = 10^{-4}\begin{bmatrix} 16{,}1 & 35{,}66 & 8{,}92 \\ 35{,}66 & 79 & 19{,}75 \\ 8{,}92 & 19{,}75 & 6{,}58 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{II} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la matriz de flexibilidad de la viga circular para esta aproximación, de acuerdo a la ecuación (a) es igual a:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2{,}71 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} 16{,}1 & -35{,}66 & -8{,}92 \\ -35{,}66 & 79 & 19{,}75 \\ -8{,}92 & 19{,}75 & 6{,}58 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2{,}71 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \qquad \text{(c)}$$

$$+10^{-4} \begin{bmatrix} 16{,}1 & 35{,}66 & 8{,}92 \\ 35{,}66 & 79 & 19{,}75 \\ 8{,}92 & 19{,}75 & 6{,}58 \end{bmatrix} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 32{,}2 & 106{,}98 & 17{,}83 \\ 106{,}98 & 631{,}97 & 79 \\ 17{,}83 & 79 & 13{,}17 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz **F**, se obtiene la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ de la barra:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1242{,}4 & 0 & -1682{,}6 \\ 0 & 63{,}3 & 379{,}8 \\ -1682{,}6 & -379{,}8 & 5316{,}7 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}$$

A partir de **H** y de **K**, teniendo en cuenta las relaciones de la ecuación (5.21) fácilmente pueden deducirse las submatrices de rigidez restantes.

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{HKH}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1242{,}4 & 0 & -1682{,}6 \\ 0 & 63{,}3 & -379{,}8 \\ -1682{,}6 & -379{,}8 & 5316{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1242{,}4 & 0 & -1682{,}6 \\ 0 & 63{,}3 & 379{,}8 \\ -1682{,}6 & 379{,}8 & 5316{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^{T} = -\mathbf{HK} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1242,4 & 0 & -1682,6 \\ 0 & 63,3 & -379,8 \\ -1682,6 & -379,8 & 5316,7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1242,4 & 0 & 1682,6 \\ 0 & -63,3 & 379,8 \\ 1682,6 & -379,8 & -759,5 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la viga curva del ejemplo, aproximada mediante una poligonal formada por dos trozos rectos es igual a:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1242,4 & 0 & -1682,6 & -1242,4 & 0 & 1682,6 \\ 0 & 63,3 & 379,8 & 0 & -63,3 & 379,8 \\ -1682,6 & 379,8 & 5316,7 & 1682,6 & -379,8 & -759,5 \\ -1242,4 & 0 & 1682,6 & 1242,4 & 0 & -1682,6 \\ 0 & -63,3 & -379,8 & 0 & 63,3 & -379,8 \\ 1682,6 & 379,8 & -759,5 & -1682,6 & -379,8 & 5316,7 \end{bmatrix} \qquad \text{(e)}$$

Aproximación con tres elementos rectos

Si se aproxima la pieza curva con tres elementos rectos iguales (Figura 5.14b), aplicando la expresión (b) se obtiene:

$$\mathbf{F}_I = 10^{-4} \begin{bmatrix} 8,5 & -13,4 & -5,34 \\ -13,4 & 21,13 & 8,41 \\ -5,34 & 8,41 & 4,46 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2,39 & 8,230 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{II} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29,63 & 9,96 \\ 0 & 9,96 & 4,46 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2,39 & 3,769 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{III} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 8,5 & 13,4 & 5,34 \\ 13,4 & 21,13 & 8,41 \\ 5,34 & 8,41 & 4,46 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_I = \mathbf{I}$$

La matriz de flexibilidad de la viga circular para esta aproximación, de acuerdo a la ecuación (a) es:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2{,}39 \\ 0 & 1 & 8{,}23 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} 8{,}5 & -13{,}4 & -5{,}34 \\ -13{,}4 & 21{,}13 & 8{,}41 \\ -5{,}34 & 8{,}41 & 4{,}46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2{,}39 & 8{,}23 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2{,}39 \\ 0 & 1 & 3{,}769 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29{,}63 & 9{,}96 \\ 0 & 9{,}96 & 4{,}46 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2{,}39 & 3{,}769 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(f)}$$

$$+ \begin{bmatrix} 8{,}5 & 13{,}4 & 5{,}34 \\ 13{,}4 & 21{,}13 & 8{,}41 \\ 5{,}34 & 8{,}41 & 4{,}46 \end{bmatrix} 10^{-4} = 10^{-4} \begin{bmatrix} 42{,}52 & 128{,}05 & 21{,}34 \\ 128{,}05 & 651{,}58 & 80{,}33 \\ 21{,}34 & 80{,}33 & 13{,}39 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz **F**, se obtiene la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ de la barra:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 \\ 0 & 59{,}1 & -354{,}7 \\ -1874{,}3 & -354{,}7 & 5862{,}4 \end{bmatrix} \qquad \text{(g)}$$

A partir de **H** y de **K**, teniendo en cuenta las relaciones de la ecuación (5.21) fácilmente pueden deducirse las submatrices de rigidez restantes.

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{HKH}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 \\ 0 & 59{,}1 & -354{,}7 \\ -1874{,}3 & -354{,}7 & 5862{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 \\ 0 & 59{,}1 & 354{,}7 \\ -1874{,}3 & 354{,}7 & 5862{,}4 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T = -\mathbf{HK} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 \\ 0 & 59{,}1 & -354{,}7 \\ -1874{,}3 & -354{,}7 & 5862{,}4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1175{,}8 & 0 & 1874{,}3 \\ 0 & -59{,}1 & 354{,}7 \\ 1874{,}3 & -354{,}7 & -1606{,}4 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la viga curva aproximada con una poligonal de tres elementos rectos es:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 & -1175{,}8 & 0 & 1874{,}3 \\ 0 & 59{,}1 & 354{,}7 & 0 & -59{,}1 & 354{,}7 \\ -1874{,}3 & 354{,}7 & 5862{,}4 & 1874{,}3 & -354{,}7 & -1606{,}4 \\ -1175{,}8 & 0 & 1874{,}3 & 1175{,}8 & 0 & -1874{,}3 \\ 0 & -59{,}1 & -354{,}7 & 0 & 59{,}1 & -354{,}7 \\ 1874{,}3 & 354{,}7 & -1606{,}4 & -1874{,}3 & -354{,}7 & 5862{,}4 \end{bmatrix} \qquad \text{(h)}$$

Si el número de elementos de la poligonal con que se realiza la aproximación es de 50 la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ que se obtiene es:

$$\mathbf{K}_{bb}=\mathbf{F}^{-1}=\begin{bmatrix} 1110{,}8 & 0 & -1980{,}4 \\ 0 & 55{,}5 & -333 \\ -1980{,}4 & -333 & 6265{,}7 \end{bmatrix}$$

Si se comparan los resultados anteriores con la matriz $\mathbf{K}_{bb}$ determinada por medios analíticos, claramente se ve la convergencia de la solución:

$$\mathbf{K}_{bb}=\mathbf{F}^{-1}=\begin{bmatrix} 1092 & 0 & -1958 \\ 0 & 55{,}5 & -333 \\ -1958 & -333 & 6238 \end{bmatrix}$$

El tratamiento de la pieza curva como una pieza formada por elementos rectos conectados en serie permite obtener su matriz de rigidez sin necesidad de realizar ningún proceso de integración (minimización de la energía elástica) siempre complejo y de difícil implementación en un programa de ordenador.

Ejemplo 5.5.3

Para la viga curva del ejercicio anterior calcular los esfuerzos en el extremo 2 (Figura 5.15) debidos a un movimiento impuesto horizontal u_2 en dicho extremo.

Datos: u_2= 2 mm ; l = 12 m ; R = 8m ; EI = 10^4 kN·m^2.

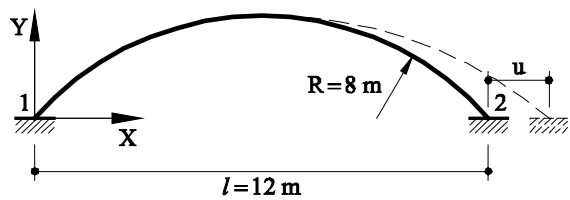


Figura 5.15: Viga circular del Ejemplo 5.5.3

Los movimientos impuestos pueden analizarse matricialmente de forma muy sencilla. Aplicando las ecuaciones (5.16) y (5.22) teniendo en cuenta que el vector **e** de movimientos en el extremo *b* de la viga puede expresarse por **e**-**e**$_i$ puede escribirse:

$$\mathbf{e} - \mathbf{e}_i = \mathbf{F}\,\mathbf{f}_2$$

Por tanto, si sólo se considera el desplazamiento impuesto $\mathbf{e}_i$, se tiene:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_i) = 0$$

Si se expresa esta ecuación en función de la matriz de rigidez, se obtiene el vector de fuerzas en el extremo 2 de la viga:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{e}_i = \mathbf{K}_{bb}\,\mathbf{e}_i$$

Y utilizando la matriz de rigidez $\mathbf{K}_{bb}$ de la viga, calculada en el ejercicio anterior se tiene:

$$\begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1092 & 0 & -1958 \\ 0 & 55{,}5 & -333 \\ -1958 & -333 & 6238 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\times10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}18 \\ 0 \\ -3{,}92 \end{bmatrix}$$

Como puede observarse, el método descrito permite determinar los esfuerzos en extremo de barra debidos a movimientos impuestos mediante sencillas operaciones matriciales.

Ejemplo 5.5.4

La estructura de la Figura 5.16 está formada por barras circulares de radio R = 6 m y ángulo central α = 60º. Las cuerdas de los círculos forman entre sí ángulos β = 120º. Para un momento *M* actuando en el nudo central libre, se pide: (a) calcular los movimientos del nudo central libre; (b) calcular las reacciones en los apoyos (todos son empotramientos)
Datos: *M*= 200 kN·m ; $EA = 10^6$ kN ; $EI = 10^4$ kN·m^2.

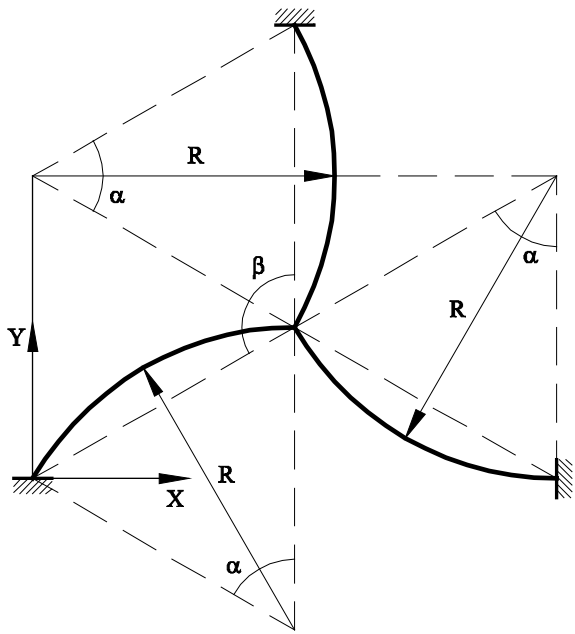


Figura 5.16: Estructura del Ejemplo 5.5.4

En primer lugar, se determina de forma aproximada la matriz de flexibilidad de la barra circular tipo (ver Figura 5.17) usando para ello una poligonal de dos trozos rectos conectados en serie, la matriz de flexibilidad del conjunto de acuerdo a la ecuación (5.44) es igual a:

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{H}_{32}^{T}\mathbf{F}_{13}\mathbf{H}_{32} + \mathbf{F}_{32} \qquad \text{(a)}$$

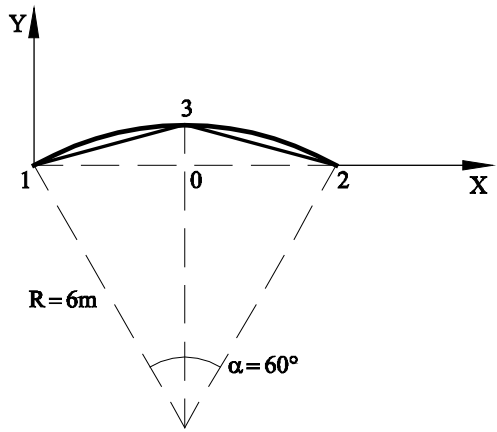


Figura 5.17: Barra curva tipo: aproximación mediante poligonal de 2 elementos

La distancia $\overline{O3}$ es igual a:

$$d_{o3} = 6 - \sqrt{36-9} = 3\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Los ejes locales del elemento 13 forman con los globales un ángulo γ:

$$\gamma = \arctan\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{3} = 15^{\circ}$$

Los ejes locales del elemento 32 forman con los globales un ángulo ϕ= - γ. Los elementos 13 y 23 tienen la misma longitud *l* y su valor es:

$$l = \sqrt{9+\left[3\left(2-\sqrt{3}\right)\right]^2} = 3{,}1050\ m$$

La matriz de flexibilidad local de los elementos 13 y 23 es idéntica:

$$\mathbf{F}' = 10^{-4}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}031058 & 0 & 0 \\ 0 & 9{,}9862 & 4{,}823 \\ 0 & 4{,}823 & 3{,}1058 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad del elemento 13 referida al sistema global es igual a:

$$\mathbf{F}_{13} = \mathbf{T}_{13}\mathbf{F}'_{13}\mathbf{T}_{13}^{T} =$$

$$= 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0,96593 & -0,25882 & 0 \\ 0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,031058 & 0 & 0 \\ 0 & 9,9862 & 4,823 \\ 0 & 4,823 & 3,1058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,96593 & 0,25882 & 0 \\ -0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{13} = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0,69793 & -2,4888 & -1,2483 \\ -2,4888 & 9,3194 & 4,6587 \\ -1,2483 & 4,6587 & 3,1058 \end{bmatrix}$$

De igual manera, la matriz de flexibilidad del elemento 32 resulta:

$$\mathbf{F}_{32} = \mathbf{T}_{32}\mathbf{F}'_{32}\mathbf{T}_{32}^{T} =$$

$$= 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0,96593 & 0,25882 & 0 \\ -0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,031058 & 0 & 0 \\ 0 & 9,9862 & 4,823 \\ 0 & 4,823 & 3,1058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,96593 & -0,25882 & 0 \\ 0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{32} = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 0,69793 & 2,4888 & 1,2483 \\ 2,4888 & 9,3194 & 4,6587 \\ 1,2483 & 4,6587 & 3,1058 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la matriz de equilibrio del elemento 32 es igual a:

$$\mathbf{H}_{32} = \mathbf{T}_{32}\mathbf{H}'_{32}\mathbf{T}_{32}^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,96593 & 0,25882 & 0 \\ -0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3,1058 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,96593 & -0,25882 & 0 \\ 0,25882 & 0,96593 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,80384 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad de la barra 132 de acuerdo a la expresión (a) es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,80384 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,69793 & -2,4888 & -1,2483 \\ -2,4888 & 9,3194 & 4,6587 \\ -1,2483 & 4,6587 & 3,1058 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,80384 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+10^{-4} \begin{bmatrix} 0,69793 & 2,4888 & 1,2483 \\ 2,4888 & 9,3194 & 4,6587 \\ 1,2483 & 4,6587 & 3,1058 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = 10^{-4} \cdot \begin{bmatrix} 1,3958 & 7,4896 & 2,4966 \\ 7,4896 & 74,5432 & 18,6348 \\ 2,4966 & 18,6348 & 6,2116 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la matriz de equilibrio de la barra 132 referida a la cuerda (ver Figura 5.17) es:

$$\mathbf{H}_{132} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta los valores de las matrices de flexibilidad y de equilibrio, pueden calcularse las submatrices de rigidez de la barra curva 12, referidas a la cuerda de la barra:

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 25487,3 & 0 & -10244,8 \\ 0 & 536,5 & -1609,6 \\ -10244,8 & -1609,6 & 10556,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^{T} = -\mathbf{H}\mathbf{F}^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25487,3 & 0 & -10244,8 \\ 0 & 536,5 & -1609,6 \\ -10244,8 & -1609,6 & 10556,5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -25487,3 & 0 & 10244,8 \\ 0 & -536,5 & 1609,6 \\ 10244,8 & -1609,6 & -898,2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{H}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25487{,}3 & 0 & -10244{,}8 \\ 0 & 536{,}5 & -1609{,}6 \\ -10244{,}8 & -1609{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25487{,}3 & 0 & -10244{,}8 \\ 0 & 536{,}5 & 1609{,}6 \\ -10244{,}8 & 1609{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix}$$

Adoptando el sistema global de referencia y la numeración de nudos que se muestra en la Figura 5.18, las distintas barras que forman la estructura quedan caracterizadas por:

$$\alpha_{14} = 30^{\circ} \qquad \alpha_{24} = 150^{\circ} \qquad \alpha_{34} = 270^{\circ}$$

Por tanto, las matrices de rigidez globales de las barras son las siguientes:

$$\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{14} = \mathbf{T}_{14}\mathbf{K}_{bb}\mathbf{T}_{14}^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25487{,}3 & 0 & -10244{,}8 \\ 0 & 536{,}5 & -1609{,}6 \\ -10244{,}8 & -1609{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19249 & 10804 & -8067{,}6 \\ 10804 & 6774{,}5 & -6516{,}6 \\ -8067{,}6 & -6516{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix}$$

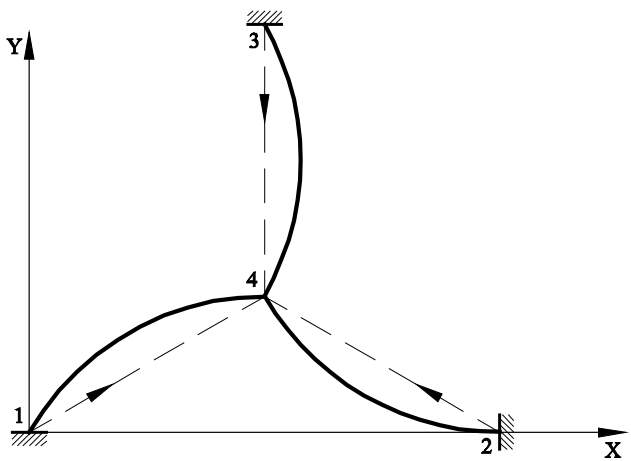


Figura 5.18: Sistema de referencia global y numeración de los nudos de la estructura

$$\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{24} = \mathbf{T}_{24}\mathbf{K}_{bb}\mathbf{T}_{24}^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25487{,}3 & 0 & -10244{,}8 \\ 0 & 536{,}5 & -1609{,}6 \\ -10244{,}8 & -1609{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19249 & -10804 & 9677{,}4 \\ -10804 & 6773{,}8 & -3728{,}4 \\ -9677{,}4 & -3728{,}4 & 10556{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{34} = \mathbf{T}_{34}\mathbf{K}_{bb}\mathbf{T}_{34}^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25487{,}3 & 0 & -10244{,}8 \\ 0 & 536{,}5 & -1609{,}6 \\ -10244{,}8 & -1609{,}6 & 10556{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 536{,}5 & 0 & -1609{,}6 \\ 0 & 25487{,}3 & 10244{,}8 \\ -1609{,}6 & 10244{,}8 & 10556{,}5 \end{bmatrix}$$

Por condición de equilibrio del nudo 4 y aplicando las condiciones de contorno, puede escribirse:

$$\mathbf{f}_4 = \left[\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{14} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{24} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{34}\right] \mathbf{d}_4$$

Reemplazando los valores correspondientes en la expresión anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39036 & 0 & 0 \\ 0 & 39035 & 0 \\ 0 & 0 & 31671 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación matricial anterior se obtienen los movimientos del nudo 4:

$$\begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}315 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y el giro en radianes.

Una vez conocidos los movimientos del nudo 4, las reacciones en los nudos 1, 2 y 3 pueden calcularse fácilmente:

$$\mathbf{R}_1 = \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{14} \mathbf{d}_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25487{,}3 & 0 & 10244{,}8 \\ 0 & -536{,}5 & 1609{,}6 \\ 10244{,}8 & -1609{,}6 & -898{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}315 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50{,}95 \\ 41{,}15 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

$$\mathbf{R}_2 = \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{24} \mathbf{d}_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}866 & -0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25487{,}3 & 0 & 10244{,}8 \\ 0 & -536{,}5 & 1609{,}6 \\ 10244{,}8 & -1609{,}6 & -898{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}315 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61{,}11 \\ 23{,}54 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

$$\mathbf{R}_3 = \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{34} \mathbf{d}_4 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -25487{,}3 & 0 & 10244{,}8 \\ 0 & -536{,}5 & 1609{,}6 \\ 10244{,}8 & -1609{,}6 & -898{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6{,}315 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10{,}17 \\ -64{,}70 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

Si las reacciones las reducimos a los ejes locales de las barras (Figura 5.19), se obtiene:

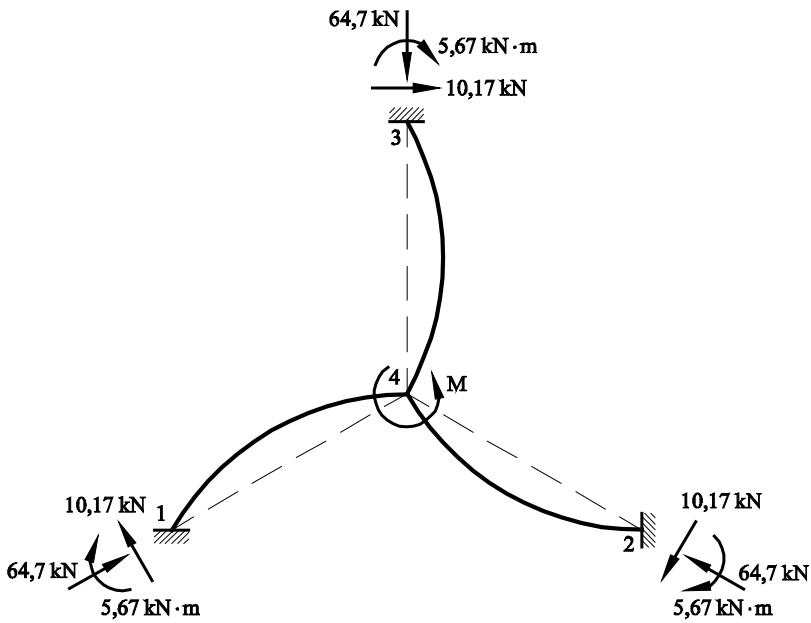


Figura 5.19: Reacciones de la estructura del Ejemplo 5.5.4

$$\mathbf{R}_1' = \mathbf{T}_{14}^T \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50{,}95 \\ 41{,}15 \\ -5{,}67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64{,}70 \\ 10{,}17 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_2' = \mathbf{T}_{24}^T \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}866 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -61{,}11 \\ 23{,}54 \\ -5{,}67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64{,}70 \\ 10{,}17 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3' = \mathbf{T}_{34}^T \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10{,}17 \\ -64{,}70 \\ -5{,}67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64{,}70 \\ 10{,}17 \\ -5{,}67 \end{bmatrix}$$

En todas las expresiones anteriores las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. En la Figura 5.19 pueden verse las reacciones de la estructura.

5.6. ESTRUCTURAS DE BARRAS CONECTADAS EN SERIE Y EN PARALELO

Tal como se ha definido en el Apartado 1.2 se llama *estructura de barras* a la formada por piezas prismáticas unidas entre sí. La unión de estas barras puede ser en serie o en paralelo (Figura 5.20).

Las estructuras que se muestran en la Figura 5.20a y 5.20b, son estructuras con barras conectadas en serie, nótese que cada nudo conecta el extremo "*b*" de una barra con el extremo "*a*" de la siguiente. En la estructura de la Figura 5.20c, la célula o celda superior está formada por las barras 23 y 34 conectadas en serie y la barra 24 conectada en paralelo con las anteriores. Nótese que el nudo 2 conecta el extremo "*a*" de las barras 23 y 24, y el nudo 4 conecta el extremo "*b*" de las barras 34 y 24. En la estructura de la Figura 5.20d, sólo las tres barras 23, 34 y 45 están conectadas en serie y la barra 25 está conectada en paralelo con las anteriores.

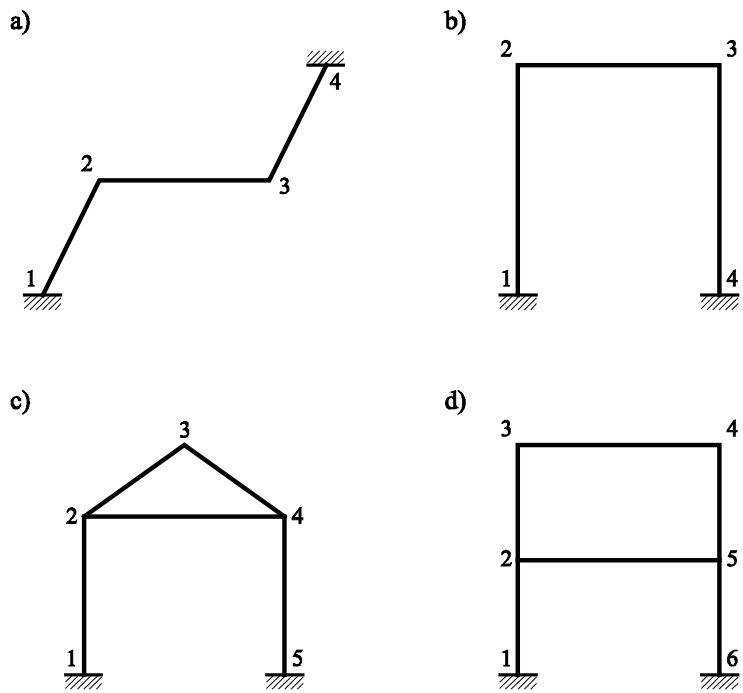


Figura 5.20: Estructuras con piezas conectadas en serie y en paralelo

Como se verá en lo que sigue, el tener en cuenta el tipo de conexión de las barras que forman una estructura puede incidir en el trabajo y en el tiempo de resolución de la misma.

Así, por ejemplo, en el caso de estructuras conectadas en serie, reemplazando todas las barras por una ficticia de rigidez equivalente que una el primer nudo con el último, se consigue una disminución del tamaño de la matriz de rigidez final de la estructura. Por otra parte, cuando la conexión es en paralelo, el análisis se simplifica si se sustituye la célula por una barra ficticia de rigidez equivalente.

5.6.1. Estructuras de barras con piezas conectadas en serie

Como se ha visto en el Apartado 5.5, utilizando el símil de muelles conectados en serie, el alargamiento individual en cada uno de ellos es igual al producto de la flexibilidad por la fuerza, y la flexibilidad del conjunto es igual a la suma de las flexibilidades de cada elemento. Por tanto, extendiendo esta conclusión a las piezas prismáticas conectadas en serie, conocidas las flexibilidades de cada pieza puede calcularse la flexibilidad *equivalente* del conjunto y su rigidez.

Supóngase la estructura de la Figura 5.21 formada por dos barras conectadas en serie, con una fuerza unitaria f_k de dirección X y aplicada en el nudo *k*.

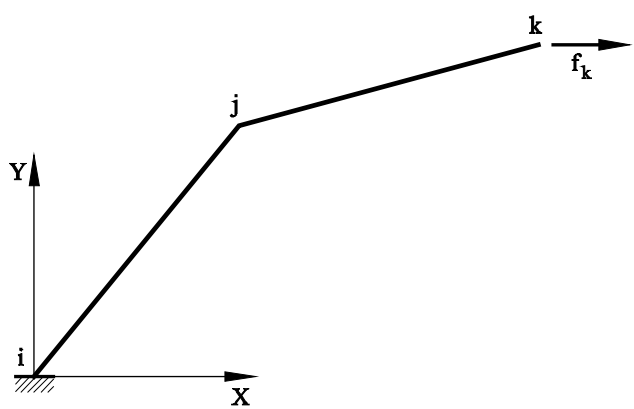


Figura 5.21: Conexión de piezas prismáticas en serie

Se trata de calcular la flexibilidad *equivalente* de la estructura, es decir, la matriz de flexibilidad correspondiente a una única barra ficticia *ik*. Para ello, es necesario calcular los movimientos en el nudo *k*.

Repitiendo lo explicado para la pieza formada por *trozos* conectados en serie se calculan los movimientos que cada pieza produce en *k* y se suman. Aplicando la ecuación (5.44) y si *n* es el número de piezas conectadas en serie puede escribirse:

$$\mathbf{d}_k = \sum_n (\mathbf{d}_k)_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_{jb}^T \mathbf{F}_{jj} \mathbf{H}_{jb} \mathbf{f}_b \tag{5.45}$$

De la ecuación anterior se deduce que la *matriz de flexibilidad equivalente* de las piezas conectadas en serie es:

$$\mathbf{F}_{ik}^e = (\mathbf{F}_{bb})_k = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{H}_{jb}^T \mathbf{F}_{jj} \mathbf{H}_{jb} \tag{5.46}$$

Invirtiendo la matriz de flexibilidad $\mathbf{F}^e_{ik}$ se obtiene la matriz de rigidez equivalente en el extremo *k* de las barras en serie:

$$\left(\mathbf{K}_{bb}^e\right)_{ik} = \left(\sum_j \mathbf{H}_{jk}^T \, \mathbf{F}_{jj} \, \mathbf{H}_{jk} \right)^{-1} \tag{5.47}$$

Las restantes submatrices de rigidez pueden obtenerse aplicando las ecuaciones (5.21):

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K}_{ab}^e\right)_{ik} &= -\mathbf{H}_{ik} \left(\mathbf{K}^e\right)_{ik} \\ \left(\mathbf{K}_{aa}^e\right)_{ik} &= \mathbf{H}_{ik} \left(\mathbf{K}^e\right)_{ik} \mathbf{H}_{ik}^T \end{aligned} \tag{5.48}$$

donde la matriz de equilibrio $\mathbf{H}_{ik}$ es igual a:

$$\mathbf{H}_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(y_k - y_i) & (x_k - x_i) & 1 \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Ejemplo 5.6.1.1

Para la estructura de barras conectadas en serie que muestra la Figura 5.22, calcular las matrices de flexibilidad y de rigidez equivalente, suponiendo para todas las barras que la relación entre la inercia y el área de su sección recta es $I/A = 2\ \text{m}^2$.

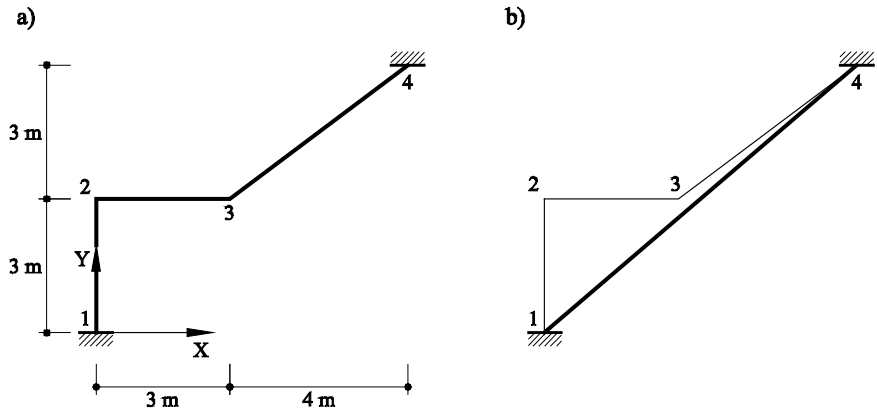


Figura 5.22: Estructura del Ejemplo 5.6.1.1

La matriz de flexibilidad equivalente de la estructura se obtiene directamente a partir de la ecuación (5.46):

$$\mathbf{F}^{e}_{serie} = \left(\mathbf{F}^{e}_{bb}\right)_{14} = \mathbf{H}^{T}_{24}\,(\mathbf{F}_{bb})_{12}\,\mathbf{H}_{24} + \mathbf{H}^{T}_{34}\,(\mathbf{F}_{bb})_{23}\,\mathbf{H}_{34} + \mathbf{H}^{T}_{44}\,(\mathbf{F}_{bb})_{34}\,\mathbf{H}_{44} \qquad \text{(a)}$$

donde $(\mathbf{F}_{bb})_{ij} = \mathbf{T}_{ij}\,(\mathbf{F}'_{bb})_{ij}\,\mathbf{T}^{T}_{ij}$, es la matriz de flexibilidad de la barra *ij* referida al sistema global de referencia. Calculando para cada barra de la estructura se obtiene:

$$(\mathbf{F})_{12} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4{,}5 \\ 0 & 4{,}5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 9 & 0 & -4{,}5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4{,}5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F})_{23} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4{,}5 \\ 0 & 4{,}5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 4{,}5 \\ 0 & 4{,}5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F})_{34} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 41{,}67 & 12{,}5 \\ 0 & 12{,}5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 21{,}40 & -15{,}20 & -7{,}5 \\ -15{,}20 & 30{,}27 & 10 \\ -7{,}5 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

La expresión general de la matriz de equilibrio de una barra de estructura reticulada plana en coordenadas globales es (ecuación (5.8)):

$$\mathbf{H}_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_y & l_x & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las matrices de equilibrio que intervienen en la expresión (a) son:

$$\mathbf{H}_{44} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación (a) los valores obtenidos se obtiene la *matriz de flexibilidad equivalente* de la estructura:

$$\mathbf{F}^e = (\mathbf{F}_{bb})^e_{14} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 117{,}4 & -159{,}2 & -30 \\ -159{,}2 & 276{,}3 & 47{,}5 \\ -30 & 47{,}5 & 11 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de flexibilidad anterior se obtiene la *matriz de rigidez equivalente* $\mathbf{K}^e$:

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{K}_{bb})^e_{14} = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 43,06 & 17,95 & 39,95 \\ 17,95 & 21,53 & -44,04 \\ 39,95 & -44,04 & 390,02 \end{bmatrix}$$

Las restantes submatrices de rigidez equivalente, de acuerdo con la ecuación (5.21), teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{H}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

son:

$$(\mathbf{K}_{ab})^e_{14} = -\mathbf{H}_{14} (\mathbf{K})^e_{14} = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} -43,06 & -17,95 & -39,95 \\ -17,95 & -21,53 & 44,04 \\ 92,76 & 1,03 & 157,96 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{aa})^e_{14} = \mathbf{H}_{14} (\mathbf{K})^e_{14} \mathbf{H}^T_{14} = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 43,06 & 17,95 & -92,76 \\ 17,95 & 21,53 & -1,03 \\ -92,76 & -1,03 & 391,39 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.6.1.2

Para la estructura reticulada de la Figura 5.23 calcular los movimientos del nudo 3, las reacciones y los esfuerzos en extremo de barra, utilizando *la matriz de rigidez equivalente* para las piezas 123 y 345. Se supone que todas las barras son de sección constante, de rigidez a flexión EI=10^4 kN·m^2 y de rigidez axil EA=10^3 kN.

La solución se inicia calculando la matriz de flexibilidad global de cada barra y a continuación, la matriz de flexibilidad equivalente del conjunto.

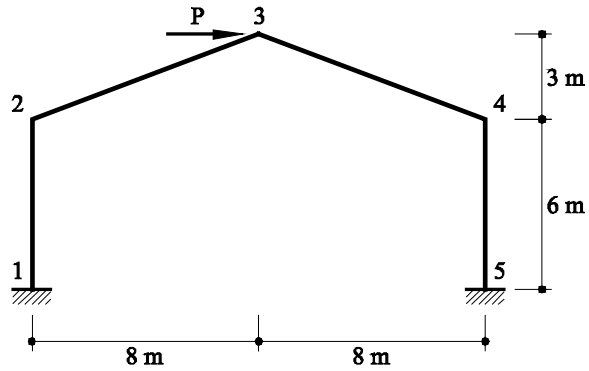


Figura 5.23: Estructura del Ejemplo 5.6.1.2

Barra equivalente del conjunto 123

Aplicando la ecuación (5.46) al conjunto 123:

$$\mathbf{F}^{e}_{serie} = \left(\mathbf{F}^{e}_{bb}\right)_{14} = \mathbf{H}^{T}_{23}\,(\mathbf{F}_{bb})_{12}\,\mathbf{H}_{23} + \mathbf{H}^{T}_{33}\,(\mathbf{F}_{bb})_{23}\,\mathbf{H}_{33} \qquad (1)$$

donde $(\mathbf{F}_{bb})_{ij} = \mathbf{T}_{ij}\,(\mathbf{F}'_{bb})_{ij}\,\mathbf{T}^{T}_{ij}$, es la matriz de flexibilidad de la barra *ij* referida al sistema global de referencia. Calculando para cada barra del conjunto se obtiene:

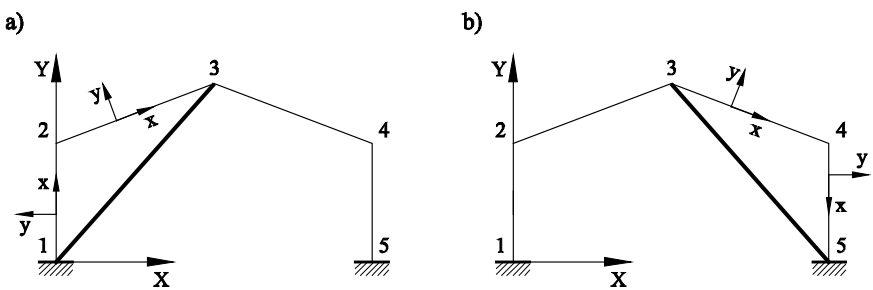


Figura 5.24: Barras equivalentes de los conjuntos 1-2-3 y 3-4-5

$$(\mathbf{F})_{12} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 7{,}2 & 0 & -1{,}8 \\ 0 & 0{,}06 & 0 \\ -1{,}8 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F})_{23} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 2{,}64 & -6{,}81 & -1{,}28 \\ -6{,}81 & 18{,}24 & 3{,}42 \\ -1{,}28 & 3{,}42 & 0{,}85 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{33} = \mathbf{I}$$

Por tanto, aplicando la expresión (1):

$$(\mathbf{F}^e)_{123} = (\mathbf{F}_{bb})^e_{123} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 26{,}04 & -35{,}61 & -4{,}88 \\ -35{,}61 & 56{,}70 & 8{,}22 \\ -4{,}88 & 8{,}22 & 1{,}45 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Invirtiendo la matriz de flexibilidad anterior se obtiene la *matriz de rigidez equivalente* $(\mathbf{K}^e)_{123}$

$$(\mathbf{F}^e_{123})^{-1} = \mathbf{K}^e_{123} = (\mathbf{K}_{bb})^e_{123} = \begin{bmatrix} 295{,}8 & 231{,}2 & -313{,}6 \\ 231{,}2 & 278{,}1 & -795{,}5 \\ -313{,}6 & -795{,}4 & 4129{,}4 \end{bmatrix}$$

Las restantes submatrices de rigidez equivalente, de acuerdo con la ecuación (5.21), teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{H}_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

son:

$$(\mathbf{K}_{ab})^e_{123} = (\mathbf{K}^T_{ba})^e_{123} = -\mathbf{H}_{13}(\mathbf{K})^e_{123} = \begin{bmatrix} -295{,}8 & -231{,}2 & 313{,}6 \\ -231{,}2 & -278{,}2 & 795{,}5 \\ 1126{,}2 & 651{,}4 & -588{,}2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{aa})^e_{123} = \mathbf{H}_{13}(\mathbf{K})^e_{123}\mathbf{H}^T_{13} = \begin{bmatrix} 295{,}8 & 231{,}2 & -1126{,}2 \\ 231{,}2 & 278{,}2 & -651{,}4 \\ -1126{,}2 & -651{,}4 & 5512{,}5 \end{bmatrix}$$

Barra equivalente del conjunto 345

Aplicando la ecuación (5.46) al conjunto 345:

$$(\mathbf{F}^{e}_{serie})_{345} = \left(\mathbf{F}^{e}_{bb}\right)_{345} = \mathbf{H}^{T}_{45}\,(\mathbf{F}_{bb})_{34}\,\mathbf{H}_{45} + \mathbf{H}^{T}_{55}\,(\mathbf{F}_{bb})_{45}\,\mathbf{H}_{55} \qquad (3)$$

donde $(\mathbf{F}_{bb})_{ij} = \mathbf{T}_{ij}\,(\mathbf{F}'_{bb})_{ij}\,\mathbf{T}^{T}_{ij}$, es la matriz de flexibilidad de la barra *ij* referida al sistema global de referencia. Calculando para cada barra del conjunto se obtiene:

$$(\mathbf{F})_{34} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 2{,}64 & -6{,}81 & -1{,}28 \\ -6{,}81 & 18{,}24 & 3{,}42 \\ -1{,}28 & 3{,}42 & 0{,}85 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{45} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F})_{45} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 7{,}2 & 0 & -1{,}8 \\ 0 & 0{,}06 & 0 \\ -1{,}8 & 0 & 0{,}6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{55} = \mathbf{I}$$

Por tanto, la matriz de rigidez del conjunto 345, aplicando la ecuación (3) resulta:

$$(\mathbf{F}^{e})_{345} = \left(\mathbf{F}_{bb}\right)^{e}_{345} = 10^{-3}\begin{bmatrix} 55{,}98 & 27{,}31 & 8{,}21 \\ 27{,}31 & 18{,}30 & 3{,}42 \\ 8{,}21 & 3{,}42 & 1{,}45 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Invirtiendo la matriz de flexibilidad anterior se obtiene la *matriz de rigidez equivalente* $(\mathbf{K}^{e})_{345}$ del conjunto de barras 345:

$$(\mathbf{F}^{e}_{345})^{-1} = \mathbf{K}^{e}_{345} = (\mathbf{K}_{bb})^{e}_{345} = \begin{bmatrix} 295{,}8 & -231{,}2 & -1126{,}2 \\ -231{,}2 & 278{,}1 & 651{,}4 \\ -1126{,}2 & 651{,}4 & 5512{,}5 \end{bmatrix}$$

Las restantes submatrices de rigidez equivalente son, de acuerdo con la ecuación (5.21) y teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{H}_{35} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{ab})^e_{345} = (\mathbf{K}^T_{ba})^e_{345} = -\mathbf{H}_{13}(\mathbf{K})^e_{345} = \begin{bmatrix} -295{,}8 & 231{,}2 & 1126{,}2 \\ 231{,}2 & -278{,}2 & -651{,}4 \\ 313{,}6 & -795{,}5 & -588{,}2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{aa})^e_{345} = \mathbf{H}_{35}(\mathbf{K})^e_{345}\mathbf{H}^T_{35} = \begin{bmatrix} 295{,}8 & -231{,}2 & -313{,}6 \\ -231{,}2 & 278{,}2 & 795{,}5 \\ -313{,}6 & 795{,}5 & 4129{,}4 \end{bmatrix}$$

La matriz global de la estructura se obtiene ensamblando las matrices de rigidez de las dos barras equivalentes:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{123} & (\mathbf{K}_{ab})_{123} & 0 \\ (\mathbf{K}_{ba})_{123} & (\mathbf{K}_{bb})_{123} + (\mathbf{K}_{aa})_{345} & (\mathbf{K}_{ab})_{345} \\ 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{345} & (\mathbf{K}_{bb})_{345} \end{bmatrix}$$

En el proceso de ensamblaje sólo intervienen los nudos 1, 3 y 5, por tanto, la matriz de rigidez de la estructura será de orden 9x9.

Debe destacarse la reducción que se produce ya que utilizando el método de rigidez clásico la matriz de rigidez resultaría de 15x15.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 295{,}8 & 231{,}2 & -1126{,}2 & -295{,}8 & -231{,}2 & 313{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 231{,}2 & 278{,}2 & -651{,}4 & -231{,}2 & -278{,}2 & 795{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 1126{,}2 & -651{,}4 & 5512{,}5 & 1126{,}2 & 651{,}4 & -588{,}2 & 0 & 0 & 0 \\ -295{,}8 & -231{,}2 & 1126{,}2 & 591{,}7 & 0 & -627{,}2 & -295{,}8 & 231{,}2 & 1126{,}2 \\ -231{,}2 & -278{,}2 & 651{,}4 & 0 & 556{,}3 & 0 & 231{,}2 & -278{,}2 & -651{,}4 \\ 313{,}6 & 795{,}5 & -588{,}2 & -627{,}2 & 0 & 8258{,}9 & 313{,}6 & -795{,}5 & -588{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & -295{,}8 & 231{,}2 & 313{,}6 & 295{,}8 & -231{,}2 & -1126{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 231{,}2 & -278{,}2 & -795{,}5 & -231{,}2 & 278{,}2 & 651{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 1126{,}2 & -651{,}4 & -588{,}2 & -1126{,}2 & 651{,}4 & 5512{,}5 \end{bmatrix}$$

Introduciendo las condiciones de apoyo de la estructura, es decir empotramiento en los nudos 1 y 5, se eliminan las ecuaciones (filas y columnas) que corresponden a los grados de libertad de dichos nudos

(1, 2, 3 y 7, 8, 9), obteniéndose el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$\begin{bmatrix} 591,7 & 0 & -627,2 \\ 0 & 556,3 & 0 \\ -627,2 & 0 & 8258,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El término de la derecha del sistema anterior corresponde al caso de cargas considerado, en el que la fuerza *P* actuante sobre el nudo 3, se ha introducido con el signo correspondiente respecto al sistema global de referencia.

La solución del sistema de ecuaciones permite obtener los movimientos del nudo 3 de la estructura inicial:

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18,38 \\ 0 \\ 1,40 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y el giro en radianes

Nótese que el uso de las matrices equivalentes para los conjuntos 123 y 456 reduce el orden del sistema final a resolver y de las matrices que es necesario manipular para obtener los movimientos pedidos.

Las reacciones se obtienen, teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_5 = 0$, mediante la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x5} \\ F_{y5} \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -295,8 & -231,2 & 313,6 \\ -213,2 & -278,2 & 795,5 \\ 1126,2 & 651,4 & -588,2 \\ -295,8 & 231,2 & 313,6 \\ 231,2 & -278,2 & -795,5 \\ 1126,2 & -651,4 & -588,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18,38 \\ 0 \\ 1,40 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3,14 \\ 19,88 \\ -5 \\ 3,14 \\ 19,88 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Nótese que en el ejemplo que se resuelve sólo existe carga en el nudo 3, por tanto, el término que corresponde a las reacciones de empotramiento en el *estado I* es nulo.

La determinación de los movimientos de los nudos 2 y 4, no considerados en el análisis anterior, se realiza usando las matrices de flexibilidad y equilibrio de las barras.

Así, por ejemplo, para calcular los movimientos del nudo 2 puede escribirse (ecuaciones (5.14) y (5.17)):

$$\mathbf{d}_2 = (\mathbf{F})_{12}\mathbf{f}_2 = -(\mathbf{F})_{12}\,\mathbf{H}_{12}^{-1}\,\mathbf{f}_1$$

Aplicando la expresión anterior, los movimientos del nudo 2 son:

$$\mathbf{d}_2 = 10^{-3}\begin{bmatrix} 7,2 & 0 & -1,8 \\ 0 & 0,06 & 0 \\ -1,8 & 0 & 0,6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -3,14 \\ 19,88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,78 \\ 0,19 \\ -2,93 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

Los movimientos del nudo 4, pueden calcularse a partir de los movimientos del nudo 3 aplicando las ecuaciones (5.9) y (5.12):

$$\mathbf{d}_4 = \mathbf{H}_{34}^{T}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{F})_{34}\mathbf{f}_4 = \mathbf{H}_{34}^{T}\,\mathbf{d}_3 + (\mathbf{F})_{34}\,\mathbf{H}_{45}\,\mathbf{f}_5$$

En la expresión anterior el primer término representa los movimientos del nudo 4 debidos a los movimientos del nudo 3 y el segundo término corresponde a los movimientos del nudo 4 debidos a la deformación de la barra 34.

$$\mathbf{d}_4 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18,38 \\ 0 \\ 1,40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,64 & -6,81 & -1,28 \\ -6,81 & 18,24 & 3,42 \\ -1,28 & 3,42 & 0,85 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 3,14 \\ 19,88 \end{bmatrix}\right\}\cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 17,78 \\ -0,19 \\ -2,93 \end{bmatrix}\cdot 10^{-3}$$

Los desplazamientos se expresan en metros y los ángulos en radianes, en todos los casos. Nótese que la solución tanto en reacciones como en movimientos satisface las condiciones de antisimetría que presenta la estructura analizada.

A continuación, aplicando la matriz de equilibrio de cada barra se determinan los esfuerzos en los extremos de barra, referidos al sistema global de coordenadas. Para las barras 12 y 23 se utilizan como esfuerzos de partida los del extremo *a* de la barra 12, ($\mathbf{H}^{-1}$) y, para las barras 34 y 45 los correspondientes al extremo *b* de la barra 45 (**H**).

Barra 12

$$(\mathbf{f}_a)_{12} = \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -3{,}14 \\ 19{,}88 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{f}_b)_{12} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{f}_a)_{12} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -3{,}14 \\ 19{,}88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3{,}14 \\ 10{,}12 \end{bmatrix}$$

Barra 23

$$(\mathbf{f}_a)_{23} = -(\mathbf{f}_b)_{12} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3{,}14 \\ -10{,}12 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{f}_b)_{23} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{f}_a)_{23} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -3{,}14 \\ -10{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3{,}14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Barra 45

$$(\mathbf{f}_b)_{45} = \mathbf{f}_5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3{,}14 \\ 19{,}88 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{f}_a)_{45} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{f}_b)_{45} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 3{,}14 \\ 19{,}88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3{,}14 \\ 10{,}12 \end{bmatrix}$$

Barra 34

$$(\mathbf{f}_b)_{34} = -(\mathbf{f}_a)_{45} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3{,}14 \\ -10{,}12 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{f}_a)_{34} = -\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{f}_b)_{34} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 3{,}14 \\ -10{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3{,}14 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Las leyes de esfuerzos en las barras 23 y 45 se obtienen fácilmente proyectando convenientemente las respectivas fuerzas de extremo en globales.

5.6.2. Estructuras de barras con piezas conectadas en paralelo

Se dice que dos o más barras están conectadas en paralelo cuando los extremos *a* y *b* de las mismas concurren al mismo nudo (ver Figuras 5.20c y 5.20d). Como ya se ha visto en apartados anteriores, el tener en cuenta el tipo de conexión de las barras que forman una estructura puede incidir en la eficacia del proceso de resolución de la misma.

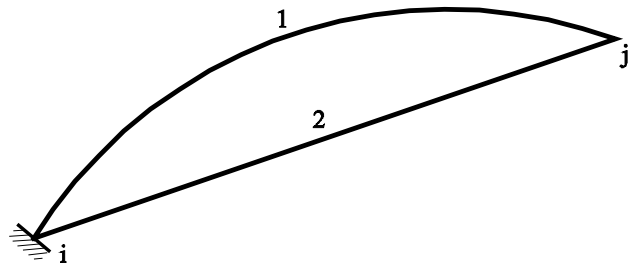


Figura 5.25: Barras conectadas en paralelo

Así, cuando la conexión es en paralelo, el análisis se simplifica si se sustituye la célula por una barra ficticia de rigidez equivalente.

A modo de ejemplo, considérense las barras 1 y 2 entre los nudos *i, j* (Figura 5.25). Supóngase que debido a la fuerza $\mathbf{f}_j$ el nudo *j* se desplaza δ_j; teniendo en cuenta las condiciones de compatibilidad, el desplazamiento de los extremos de las barras debe ser el mismo, por tanto, para la barra 1 puede escribirse:

$$\mathbf{f}_{ji}^{1} = \mathbf{K}_{bb}^{1}\delta_j \tag{5.50}$$

donde $\mathbf{K}_{bb}^{1}$ es la matriz de rigidez del elemento 1 en coordenadas globales. Por equilibrio del nudo 1 se tiene:

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{f}_{ji}^{1} + \mathbf{f}_{ji}^{2} = \left(\mathbf{K}_{bb}^{1} + \mathbf{K}_{bb}^{2}\right)\delta_j = \mathbf{K}_{bb}^{e}\,\delta_j \tag{5.51}$$

De la ecuación anterior puede concluirse fácilmente que la *matriz de rigidez equivalente* de las barras conectadas en paralelo es igual a la matriz suma de la rigidez de cada barra.

Ejemplo 5.6.2.1

Para la estructura de la Figura 5.26, calcular la rigidez equivalente de la célula entre los nudos 2, 3 y 4, suponiendo para todas las barras el mismo material y una relación entre la inercia y el área de su sección recta de $I/A = 10\ m^2$.

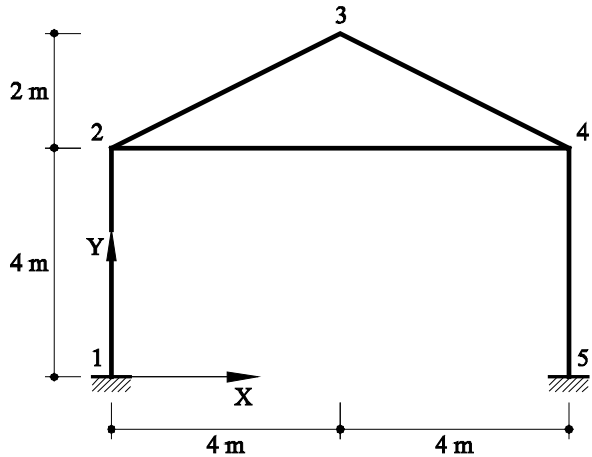


Figura 5.26: Estructura del Ejemplo 5.6.2.1

Se determina en primer lugar la flexibilidad equivalente de las barras 23 y 34, conectadas en serie aplicando la ecuación (5.46):

$$\mathbf{F}^{e}_{serie} = \mathbf{H}^{T}_{44}(\mathbf{F}_{bb})_{34}\mathbf{H}_{44} + \mathbf{H}^{T}_{34}(\mathbf{F}_{bb})_{23}\mathbf{H}_{34} \qquad \text{(a)}$$

donde $(\mathbf{F}_{bb})_{ij}$ es la matriz de flexibilidad de la barra *ij* referida al sistema global de coordenadas:

$$(\mathbf{F}_{bb})_{ij} = \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{F}'_{bb})_{ij}\mathbf{T}^{T}_{ij} = \begin{bmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{l^3}{3EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la matriz de flexibilidad de las barras 23 y 34 es:

$$(\mathbf{F}_{bb})_{23} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}894 & -0{,}447 & 0 \\ 0{,}447 & 0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 44{,}72 & 0 & 0 \\ 0 & 29{,}81 & 10 \\ 0 & 10 & 4{,}47 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}894 & 0{,}447 & 0 \\ -0{,}447 & 0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 41{,}70 & 5{,}96 & -4{,}47 \\ 5{,}96 & 32{,}76 & 8{,}94 \\ -4{,}47 & 8{,}94 & 4{,}47 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{F}_{bb})_{34} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}894 & 0{,}447 & 0 \\ -0{,}447 & 0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 44{,}72 & 0 & 0 \\ 0 & 29{,}81 & 10 \\ 0 & 10 & 4{,}47 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}894 & -0{,}447 & 0 \\ 0{,}447 & 0{,}894 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 41{,}70 & -5{,}96 & 4{,}47 \\ -5{,}96 & 32{,}76 & 8{,}94 \\ 4{,}47 & 8{,}94 & 4{,}47 \end{bmatrix}$$

La expresión general de la matriz de equilibrio de una barra de una estructura reticulada plana, expresada en coordenadas globales es (ecuación (5.8):

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -l_y & l_x & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, puede escribirse:

$$\mathbf{H}_{44} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo ahora la expresión (a) se obtiene la matriz de flexibilidad *equivalente* de las barras 23 y 34 conectadas en serie:

$$\mathbf{F}^{e}_{serie} = (\mathbf{F}_{bb})^{e}_{234} = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 83{,}40 & 35{,}76 & 8{,}94 \\ 35{,}76 & 208{,}62 & 35{,}76 \\ 8{,}94 & 35{,}76 & 8{,}94 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz anterior se obtiene la matriz de rigidez equivalente de las barras 23 y 34 conectadas en serie (Figura 5.27a):

$$\mathbf{K}^{e}_{serie} = (\mathbf{K}_{bb})^{e}_{234} = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 13{,}43 & 0 & -13{,}43 \\ 0 & 15{,}26 & -61{,}05 \\ -13{,}43 & -61{,}05 & 369{,}49 \end{bmatrix}$$

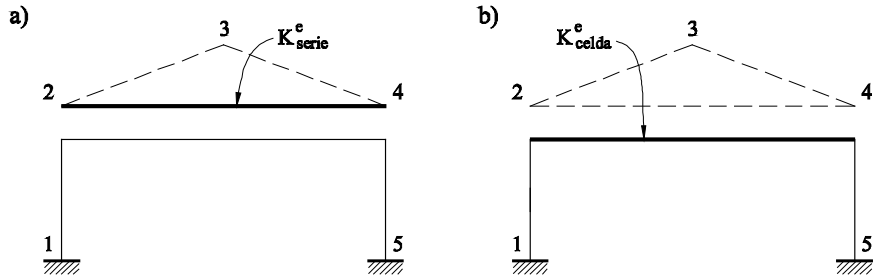


Figura 5.27:Barras equivalentes: a) en serie 234 b) celda superior 2342

Por otra parte, la matriz de rigidez de la barra 24 es igual a:

$$\mathbf{K}_{24} = (\mathbf{K}_{bb})_{24} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 12,50 & 0 & 0 \\ 0 & 23,44 & -93,75 \\ 0 & -93,75 & 500,0 \end{bmatrix}$$

Aplicando la ecuación (5.51) se obtiene la ***matriz de rigidez equivalente*** de la celda superior (Figura 5.27b):

$$\mathbf{K}^e_{celda} = (\mathbf{K}_{bb})^e_{celda} = (\mathbf{K}_{bb})^e_{serie} + (\mathbf{K}_{bb})_{24} = \\ = EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 25,93 & 0 & -13,43 \\ 0 & 38,70 & -154,8 \\ -13,43 & -154,8 & 869,49 \end{bmatrix}$$

Las submatrices restantes se obtienen directamente aplicando la ecuación (5.21):

$$(\mathbf{K}_{ab})^e_{celda} = -\mathbf{H}_{24}(\mathbf{K})^e_{celda} = \\ = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25,93 & 0 & -13,43 \\ 0 & 38,70 & -154,8 \\ -13,43 & -154,8 & 869,49 \end{bmatrix} EI \cdot 10^{-3} \\ = EI \cdot 10^{-3} \begin{bmatrix} -25,93 & 0 & 13,43 \\ 0 & -38,70 & 154,8 \\ 13,43 & -154,8 & 368,91 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{aa})^{e}_{celda} = \mathbf{H}_{24}\left(\mathbf{K}\right)^{e}_{celda}\mathbf{H}^{T}_{24} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix} EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 25,93 & 0 & -13,43 \\ 0 & 38,7 & -154,8 \\ -13,43 & -154,8 & 869,49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= EI \cdot 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 25,93 & 0 & -13,43 \\ 0 & 38,70 & 154,80 \\ -13,43 & 154,80 & 869,49 \end{bmatrix}$$

5.7. NUDOS DE TAMAÑO FINITO

En general, la definición geométrica de una estructura reticulada se realiza mediante un conjunto de líneas que representan las directrices de las piezas prismáticas, unidas unas a otras en puntos que representan los nudos (Figura 5.28a) y en el análisis de la estructura se prescinde del tamaño de los nudos.

Sin embargo, existen algunos casos en que este supuesto puede afectar la precisión de los resultados, por ejemplo, cuando las directrices de las barras que concurren a un nudo, no se cortan en el mismo punto (Figura 5.28b). Supóngase la barra BC unida a los nudos A y D mediante cartelas rígidas AB y CD (Figura 5.29), los movimientos y los esfuerzos de extremo de barra se refieren a los puntos A y D que se han elegido de forma arbitraria.

Se suponen conocidas las matrices de rigidez del elemento flexible BC, referidas al sistema local que se muestra en la figura. Para calcular las matrices de rigidez de la barra compuesta AD y dado que el único trozo flexible de la misma es el BC, aplicando la ecuación (5.46) se obtiene:

$$\mathbf{F}_{AD} = \mathbf{H}^{T}_{CD}\left(\mathbf{F}_{bb}\right)_{BC}\mathbf{H}_{CD} \qquad (5.52)$$

donde $\boldsymbol{F}_{AD}$ *es la matriz de flexibilidad de la barra compuesta AD.*

Invirtiendo la matriz $\mathbf{F}_{AD}$ se obtiene la matriz de rigidez $\mathbf{K} = (\mathbf{K_{bb}})_{AD}$ de la barra compuesta:

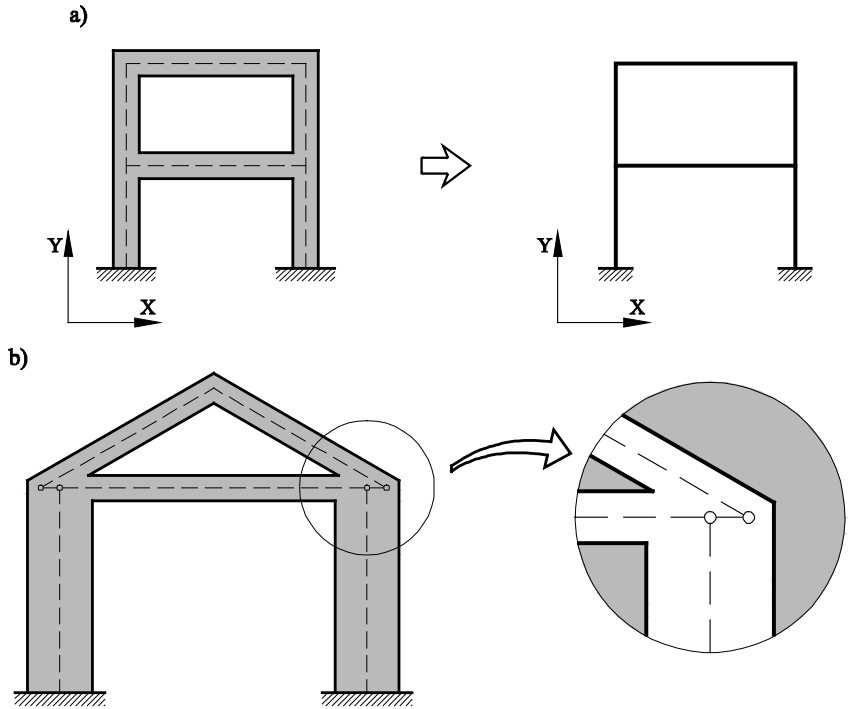


Figura 5.28: Estructuras de barras: a) nudos convencionales; b) nudos de tamaño finito

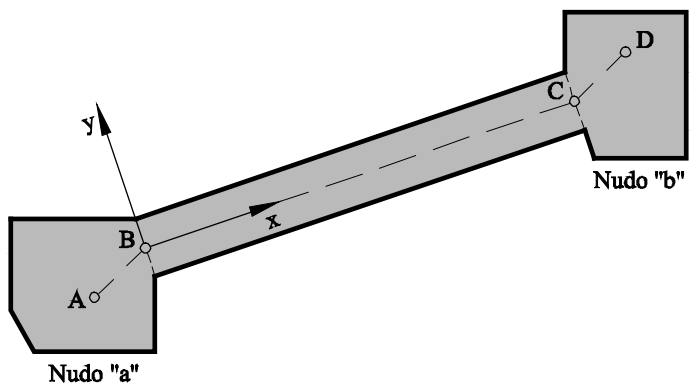


Figura 5.29: Pieza prismática con nudos de tamaño finito

$$\mathbf{K}_{AD} = \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{AD} = \mathbf{H}_{CD}^{-1}\left(\mathbf{F}_{bb}\right)_{BC}^{-1}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{T} = \mathbf{H}_{CD}^{-1}\,\mathbf{K}_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{T} \tag{5.53}$$

Utilizando las expresiones (5.21) pueden calcularse las restantes submatrices de rigidez $(\mathbf{K}_{ij})_{AD}$ de la barra compuesta. Es importante destacar que la matriz de equilibrio **H** de la barra completa es igual al producto de las matrices de equilibrio de cada trozo que forma la barra, es decir:

$$\mathbf{H}_{AD} = \mathbf{H}_{AB}\,\mathbf{H}_{BC}\,\mathbf{H}_{CD} \tag{5.54}$$

y, por tanto, las restantes submatrices de la barra compuesta pueden escribirse:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{K}_{aa}\right)_{AD} &= \mathbf{H}_{AD}\,\mathbf{K}_{AD}\,\mathbf{H}_{AD}^{T} = \mathbf{H}_{AB}\mathbf{H}_{BC}\mathbf{H}_{CD}\,\mathbf{H}_{CD}^{-1}\,\mathbf{K}_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{T}\,\mathbf{H}_{CD}^{T}\,\mathbf{H}_{BC}^{T}\,\mathbf{H}_{AB}^{T} \\ &= \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{aa}\right)_{BC}\,\mathbf{H}_{AB}^{T}\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{AD} &= \left(\mathbf{K}_{ba}^{T}\right)_{AD} = -\mathbf{H}_{AD}\,\mathbf{K}_{AD} = -\mathbf{H}_{AB}\mathbf{H}_{BC}\mathbf{H}_{CD}\,\mathbf{H}_{CD}^{-1}\,\mathbf{K}_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{T} \\ &= \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{T}\end{aligned} \tag{5.56}$$

Las expresiones anteriores son independientes del tipo de estructura, es decir, son aplicables tanto a estructuras planas como espaciales y permiten obtener la matriz de rigidez de la pieza compuesta AD en función de las matrices de rigidez del elemento flexible BC.

En el ejemplo elegido para el desarrollo, (Figura 5.29) sean (x_A, y_A) y (x_D, y_D) las coordenadas del punto A y del punto D respectivamente, referidas al sistema local de referencia de la parte flexible de la barra. Por condición de equilibrio en los nudos puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_{zA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -y_A & x_A & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_{zB} \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xD} \\ F_{yD} \\ M_{zD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_D & -(x_D - L) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xC} \\ F_{yC} \\ M_{zC} \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

o en forma compacta:

$$\mathbf{f}_A = \mathbf{H}_{AB}\,\mathbf{f}_B$$
$$\mathbf{f}_D = \mathbf{H}_{CD}^{-1}\,\mathbf{f}_C \tag{5.59}$$

Téngase en cuenta que en el desarrollo anterior aunque se han suprimido los apóstrofes para mayor sencillez en la escritura, todos los valores están referidos al sistema local del elemento flexible de la barra (BC) (ver Figura 5.30).

Por otra parte, los movimientos de cada nudo de la pieza compuesta pueden expresarse por:

$$\begin{bmatrix} u_B \\ v_B \\ \phi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_A \\ 0 & 1 & x_A \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ \phi_A \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ \phi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_D \\ 0 & 1 & -(x_D - L) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_D \\ v_D \\ \phi_D \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

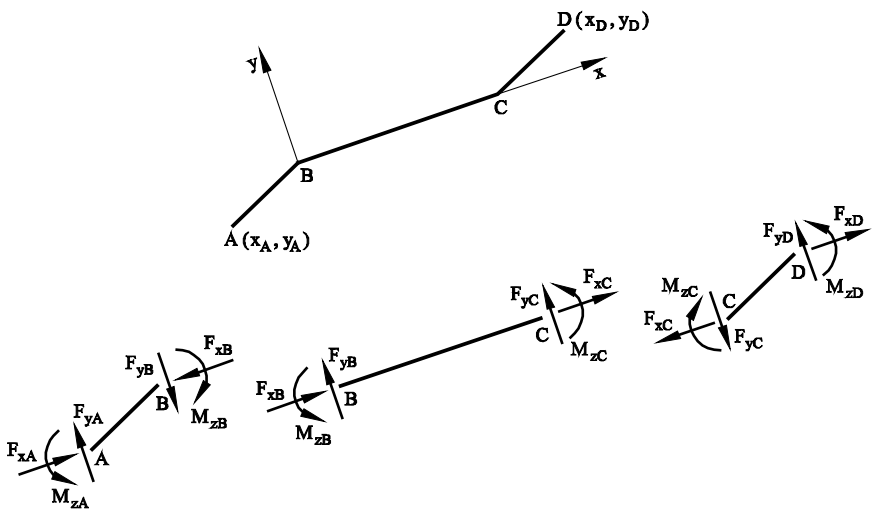


Figura 5.30: Equilibrio en el elemento flexible(BC) y en los nudos "a" y "b"

o en forma compacta:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_B &= \mathbf{H}_{AB}^T\,\mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_C &= \left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{d}_D\end{aligned} \tag{5.61}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las ecuaciones elásticas (2.7) en coordenadas locales, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_A &= \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{aa}\right)_{BC}\mathbf{H}_{AB}^T\,\mathbf{d}_A + \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{ab}\right)_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{d}_D \\ \mathbf{f}_D &= \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{ba}\right)_{BC}\mathbf{H}_{AB}^T\,\mathbf{d}_A + \mathbf{H}_{AB}\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{BC}\left(\mathbf{H}_{CD}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{d}_D\end{aligned} \tag{5.62}$$

Las expresiones anteriores son las ecuaciones elásticas en coordenadas locales para barras con nudos rígidos de tamaño finito. Para obtenerlas referidas al sistema global se siguen los mismos pasos explicados en el planteamiento general (Apartado 2.10).

5.8. NUDOS ELÁSTICOS

En una estructura reticulada formada por barras unidas mediante nudos rígidos, por compatibilidad, los movimientos de un nudo y los de los extremos de las barras que concurren a él deben ser idénticos. Sin embargo, en algunos casos de interés, pueden existir uniones de las piezas en las que los giros que sufre el nudo que es flexible y los extremos de las barras que concurren a él sean diferentes. Supóngase una pieza prismática *ab* de longitud *l* y de rigidez a flexión *EI*; cuyos extremos están unidos al resto de la estructura mediante nudos que transmiten al resto de la estructura momentos proporcionales a su respectiva rigidez k_1 y k_2 (Figura 5.31). Si se considera fijo el extremo "a" de la barra, el vector movimientos en el borde frontal de la conexión puede expresarse por:

$$\begin{bmatrix} u_a^* \\ v_a^* \\ \phi_a^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{4EI\,k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{xa}^* \\ F_{ya}^* \\ M_a^* \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

donde las fuerzas y los movimientos con asterisco se muestran en la Figura 5.31.

La matriz de flexibilidad de la conexión en el extremo “a” es igual a:

$$\mathbf{F}_{ca} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{4EI\,k_1} \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

y en el extremo “b”:

$$\mathbf{F}_{cb} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{4EI\,k_2} \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

Por otra parte, la matriz de flexibilidad de la barra es (ver Ejemplo 5.3.1):

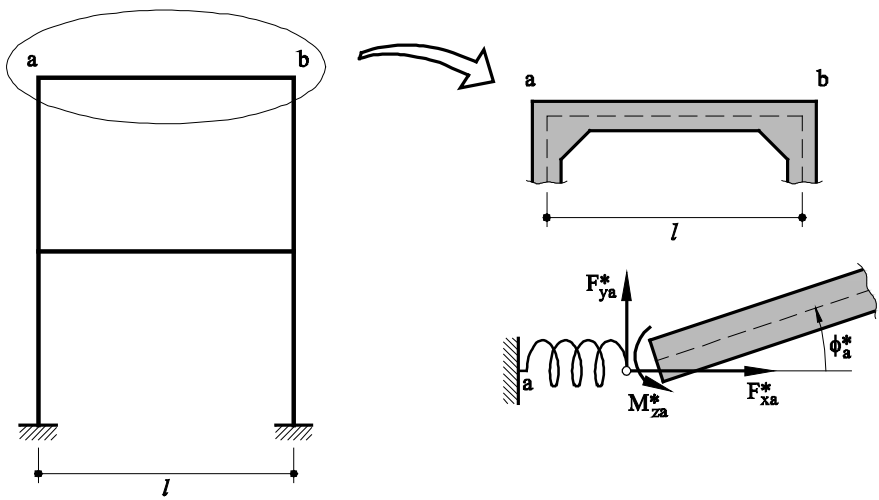


Figura 5.31: Pieza prismática con nudo elástico

$$\mathbf{F}_{barra} = \begin{bmatrix} \dfrac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{l^3}{3EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & \dfrac{l^2}{2EI} & \dfrac{l}{EI} \end{bmatrix}$$

Aplicando el procedimiento desarrollado en el Apartado 5.5, puede calcularse la matriz de flexibilidad del conjunto. Despreciando la longitud de las conexiones, aplicando la ecuación (5.46) se tiene:

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}_{ca} \mathbf{H} + \mathbf{F}_{barra} + \mathbf{F}_{cb} \tag{5.66}$$

donde **H** es la matriz de equilibrio de la barra y $\mathbf{H}^T \mathbf{F}_{ca} \mathbf{H}$ es la flexibilidad de la conexión del extremo "a" con respecto al extremo "b":

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}_{ca} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{l}{4EI\ k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{l^3}{4EIk_1} & \dfrac{l^2}{4EIk_1} \\ 0 & \dfrac{l^2}{4EIk_1} & \dfrac{l}{4EIk_1} \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

Sumando las matrices restantes:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \dfrac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{l^3}{EI}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4k_1}\right) & \dfrac{l^2}{EI}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4k_1}\right) \\ 0 & \dfrac{l^2}{EI}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4k_1}\right) & \dfrac{l}{EI}\left(1+\dfrac{1}{4k_1}+\dfrac{1}{4k_2}\right) \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

Invirtiendo la matriz de flexibilidad se obtiene la matriz de rigidez **K**:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{l^3}\left(\dfrac{4k_1k_2 + k_1 + k_2}{2k}\right) & -\dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_2 + 2k_1k_2}{k}\right) \\ 0 & -\dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_2 + 2k_1k_2}{k}\right) & \dfrac{4EI}{l}\left(\dfrac{3k_2 + 4k_1k_2}{2k}\right) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

donde: $$k = 2(1+k_1)(1+k_2) - \frac{1}{2}$$

En la expresión (5.68) puede comprobarse que para $k_1 = k_2 = \infty$ se recupera la expresión obtenida en el Ejemplo 5.3.1 (ecuación (b)) correspondiente a la unión de barras mediante nudos rígidos. Por otra parte, aplicando directamente la ecuación (5.21) se obtienen las submatrices restantes

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{H}\mathbf{K}\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} \dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{12EI}{l^3}\left(\dfrac{4k_1k_2 + k_1 + k_2}{2k}\right) & \dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_1 + 2k_1k_2}{k}\right) \\ 0 & \dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_1 + 2k_1k_2}{k}\right) & \dfrac{4EI}{l}\left(\dfrac{3k_1 + 4k_1k_2}{2k}\right) \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T = \begin{bmatrix} -\dfrac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{12EI}{l^3}\left(\dfrac{4k_1k_2 + k_1 + k_2}{2k}\right) & \dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_2 + 2k_1k_2}{k}\right) \\ 0 & -\dfrac{6EI}{l^2}\left(\dfrac{k_1 + 2k_1k_2}{k}\right) & \dfrac{2EI}{l}\left(\dfrac{2k_1k_2}{k}\right) \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

Es interesante señalar la modificación que sufren las submatrices de rigidez anteriores, en el caso de una barra articulada en un extremo y empotrada rígidamente en el otro, es decir, el valor k_i en un extremo es nulo y en el otro extremo es infinito. Analicemos las dos posibilidades:

(I) Barra articulada en a y empotrada rígidamente en b (k_1=0 y k_2=∞)

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.72}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.73}$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \tag{5.74}$$

(II) Barra empotrada rígidamente en a y articulada en b (k_1=∞ y k_2=0)

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix} \tag{5.75}$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ba}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.76}$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5.77)$$

Por último, si las constantes elásticas en ambos extremos son nulas, es decir; (k_1=k_2=0) puede comprobarse que todos los términos de las submatrices asociados a la flexión son nulos; físicamente esta situación nos indica que una barra articulada en ambos extremos puede tratarse como una barra de rigidez a flexión nula, unida al resto de la estructura mediante nudos rígidos.

Ejemplo 5.8.1

Para la estructura de la Figura 5.32 formada por barras de igual rigidez a flexión y a axil, calcular la matriz de rigidez del dintel, suponiendo que la conexión del mismo en los nudos puede ser de los tipos siguientes:

a) unión elástica en ambos extremos de idéntica rigidez k_2=k_3= 10)

b) unión rígida en ambos extremos (k_2=k_3= ∞)

Para cada caso supuesto, calcular las reacciones en el empotramiento izquierdo de la estructura.

Datos: *l*=6 m; F_2=90kN; F_3=270 kN ; M_2=160 kN·m; M_3=320 kN·m ; EI=10^5 kN·m^2 ; EA=10^7 kN

Se resuelve primero, la estructura para el caso (a) de unión elástica de la barra con los valores de k_2 = k_3 = 10 (Figura 5.33).
Aplicando las expresiones (5.69), (5.70) y (5,71) se calcula la matriz de rigidez del dintel.

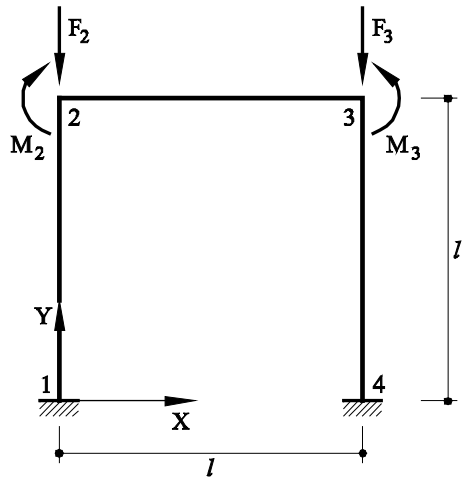


Figura 5.32: Pórtico del Ejemplo 5.8.1

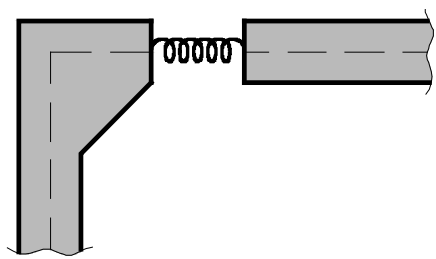


Figura 5.33: Esquema de la unión elástica del dintel en el nudo izquierdo

$$(\mathbf{K}_{aa})_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 4,831 & 14,493 \\ 0 & 14,493 & 59,351 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{ab})_{23} = (\mathbf{K}_{ba}^T)_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & -4,831 & 14,493 \\ 0 & -14,493 & 27,605 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{bb})_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 4,831 & -14,493 \\ 0 & -14,493 & 59,351 \end{bmatrix}$$

Los movimientos de la estructura pueden obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1672,222 & 0 & 16,667 & -1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 1671,498 & 14,493 & 0 & -4,831 & 14,493 \\ 16,667 & 14,493 & 126,018 & 0 & -14,493 & 27,605 \\ -1666,667 & 0 & 0 & 1672,222 & 0 & 16,667 \\ 0 & -4,831 & -14,493 & 0 & 1671,498 & -14,493 \\ 0 & 14,493 & 27,605 & 16,667 & -14,493 & 126,018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -160 \\ 0 \\ -270 \\ 320 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema anterior permite obtener los movimientos de la estructura:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2703 \\ -0,0675 \\ -1,680 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,295 \\ -0,149 \\ 3,202 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Las reacciones en el empotramiento izquierdo se calculan resolviendo:

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{K}_{aa})_{12}\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{12}\mathbf{d}_2$$

Nótese que al existir sólo cargas en los nudos, el término que corresponde al *estado I* de empotramiento perfecto es nulo y, además, teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1$=0, resulta:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -5,555 & 0 & -16,667 \\ 0 & -1666,667 & 0 \\ 16,667 & 0 & 33,333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,2703 \\ -0,0675 \\ -1,680 \end{bmatrix} 10^{-3} = \begin{bmatrix} 40,61 \\ 112,50 \\ -93,83 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

A continuación, se resuelve la estructura para el caso (b), extremos de la barra rígidamente unidos en los nudos, (k_2=k_3= ∞) (Figura 5.34).

La matriz de rigidez del dintel se calcula mediante las expresiones obtenidas en el Capítulo 2, (2.26)-(2.29).

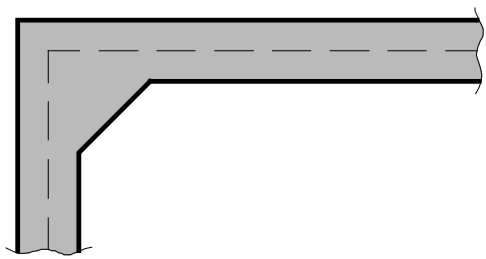


Figura 5.34: Esquema de la unión rígida del dintel en el nudo izquierdo

$$(\mathbf{K}_{aa})_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 5,555 & 16,667 \\ 0 & 16,667 & 66,667 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{ab})_{23} = (\mathbf{K}_{ba}^T)_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & -5,555 & 16,667 \\ 0 & -16,667 & 33,333 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{K}_{bb})_{23} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 5,555 & -16,667 \\ 0 & -16,667 & 66,667 \end{bmatrix}$$

Los movimientos de la estructura se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones reducido siguiente:

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 1672,222 & 0 & 16,667 & -1666,667 & 0 & 0 \\ 0 & 1672,222 & 16,667 & 0 & -5,555 & 16,667 \\ 16,667 & 16,667 & 133,334 & 0 & -16,667 & 33,333 \\ -1666,667 & 0 & 0 & 1672,222 & 0 & 16,667 \\ 0 & -5,555 & -16,667 & 0 & 1672,222 & -16,667 \\ 0 & 16,667 & 33,333 & 16,667 & -16,667 & 133,334 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -90 \\ -160 \\ 0 \\ -270 \\ 320 \end{bmatrix}$$

Los movimientos en los nudos 2 y 3 de la estructura resultan:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,011 \\ -0,0678 \\ -1,727 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,035 \\ -0,148 \\ 3,076 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

donde los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes.

Repitiendo los pasos seguidos para el caso unión elástica del dintel, las reacciones en el empotramiento izquierdo se calculan resolviendo:

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{K}_{aa})_{12}\mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{12}\mathbf{d}_2$$

Como en el caso anterior al existir sólo cargas en los nudos, el término que corresponde al *estado I* de empotramiento perfecto es nulo y teniendo en cuenta que $\mathbf{d}_1$=0, las reacciones en el empotramiento resultan:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} -5,555 & 0 & -16,667 \\ 0 & -1666,667 & 0 \\ 16,667 & 0 & 33,333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,011 \\ -0,0678 \\ -1,727 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} 39,96 \\ 113,00 \\ -91,08 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

Capítulo 6

MATRIZ DE TRANSFERENCIA Y MÉTODO DE ANÁLISIS POR SUBESTRUCTURAS

6.1. INTRODUCCIÓN

El análisis matricial de estructuras lleva implícito el manejo de matrices cuyo tamaño depende del número de nudos o de barras de la estructura y precisa de la inversión de la matriz de rigidez **K**, si la estructura es compleja esto se traduce en el manejo de grandes matrices.

En el capítulo anterior se ha visto que son bastante frecuentes las estructuras de barras conectadas en serie, es decir, aquellas en las que los nudos están unidos entre sí mediante una simple cadena de barras. Así, por ejemplo, según muestra la Figura 6.1, un nudo genérico *J* está directamente unido al *J*-1 y al *J*+1, y en algunos casos también a la sustentación pero no a otros nudos.

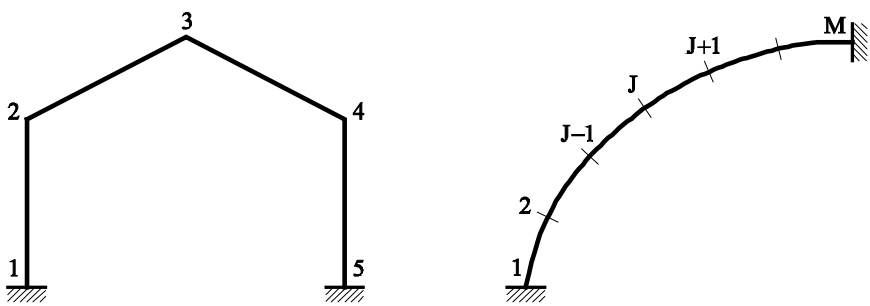


Figura 6.1: Tipos de estructuras apropiadas para el uso de matrices de transferencia

El análisis de una estructura puede simplificarse cuando se dan estas condiciones, utilizando un nuevo método matricial que manipula matrices de menor orden llamadas *matrices de transferencia.*

6.2. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UNA BARRA RECTA

Las ecuaciones de equilibrio de una barra asilada como se ha visto en el Capítulo 5, pueden escribirse como:

$$\mathbf{f}_a + \mathbf{H}\,\mathbf{f}_b = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_b = 0 \tag{6.1}$$

donde $\mathbf{f}_a$ y $\mathbf{f}_b$ son los vectores de esfuerzos en los extremos *a* y *b* de la barra, respectivamente y, **H** la matriz de equilibrio de la misma. Esta relación se satisface tanto en coordenadas globales como en locales.

Además si se hace **e** = $\mathbf{d}_b$, y se tiene en cuenta que un movimiento de sólido rígido de la barra se traduce en $\mathbf{d}_a^{\,*}$ y $\mathbf{d}_b^{\,*}$, movimientos en *a* y *b*,(ver Figura 5.3) y que éstos están relacionados entre sí a través de la matriz de equilibrio **H** (ecuación (5.12)), los movimientos de los extremos *a* y *b* de la barra, considerando que está empotrada inicialmente en *a*, serán:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a^* \quad ; \quad \mathbf{d}_b = \mathbf{d}_b^* + \mathbf{e}$$

De las expresiones (5.12) y (5.18) puede escribirse:

$$\mathbf{d}_b = \mathbf{H}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{e} = \mathbf{H}^T\mathbf{d}_a + \mathbf{F}\,\mathbf{f}_b \tag{6.2}$$

De las ecuaciones (6.1) y (6.2) se deduce:

$$\mathbf{f}_b = -\mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{f}_a \qquad \mathbf{d}_b = \mathbf{H}^T\,\mathbf{d}_a - \mathbf{F}\,\mathbf{H}^{-1}\,\mathbf{f}_a \tag{6.3}$$

que en forma matricial pueden expresarse:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{d}_b\\ \mathbf{f}_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}^T & -\mathbf{F}\,\mathbf{H}^{-1}\\ 0 & -\mathbf{H}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_a\\ \mathbf{f}_a\end{bmatrix} \tag{6.4}$$

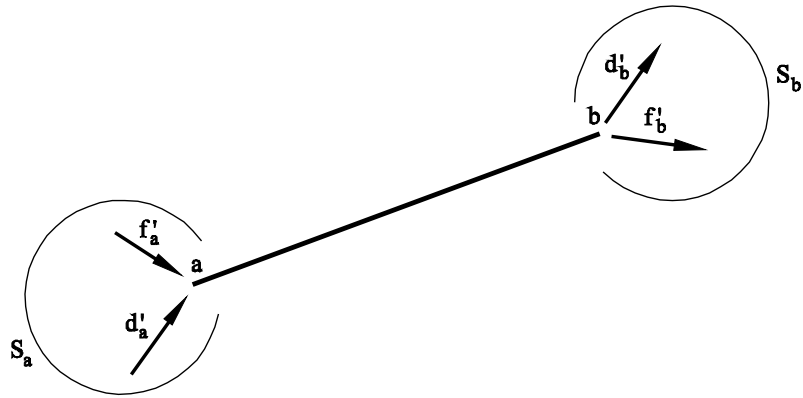


Figura 6.2: Vectores de estado de una barra aislada

La relación anterior introduce dos nuevos conceptos matriciales los vectores de estado y la matriz de transferencia (Figura 6.2).

Los vectores de estado $\mathbf{S}_a$ y $\mathbf{S}_b$ correspondientes al extremo *a* y *b*, respectivamente, combinan los movimientos y esfuerzos en un extremo de la barra y la matriz de transferencia de la barra **G** los relaciona. De manera que la ecuación (6.4) puede escribirse de forma más compacta como:

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{G}\,\mathbf{S}_a \tag{6.5}$$

Relación que se satisface tanto en globales como en locales sin más que utilizar **H** y **F** en dichos sistemas de referencia.

De forma análoga puede expresarse $\mathbf{S}_a$ en función de $\mathbf{S}_b$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_a \\ \mathbf{f}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{H}^T\right)^{-1} & -\left(\mathbf{H}^T\right)^{-1}\mathbf{F} \\ 0 & -\mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{G}^{-1}\,\mathbf{S}_b \tag{6.7}$$

En el caso de una barra recta de sección uniforme de una estructura reticulada plana, la matriz de transferencia **G** se obtiene fácilmente sustituyendo los valores de **H** y **F** correspondientes.

En consecuencia, la ecuación (6.5) en coordenadas locales puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \\ F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & 0 & \dfrac{l^3}{6EI} & -\dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \phi'_a \\ F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

y de forma análoga, para la ecuación (6.7) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \phi'_a \\ F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l & 0 & \dfrac{l^3}{6EI} & \dfrac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{l^2}{2EI} & -\dfrac{l}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \phi'_b \\ F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

6.3. MATRIZ DE TRANSFERENCIA DE UNA ESTRUCTURA RETICULADA

Supóngase la estructura reticulada plana de la Figura 6.3 formada por un conjunto de barras conectadas en serie, bajo las cargas exteriores aplicadas en los nudos que se indican. Las matrices de transferencia de las barras son conocidas, ya que sólo dependen de **H** y de **F**.

En el extremo izquierdo de la barra I el vector de estado correspondiente es:

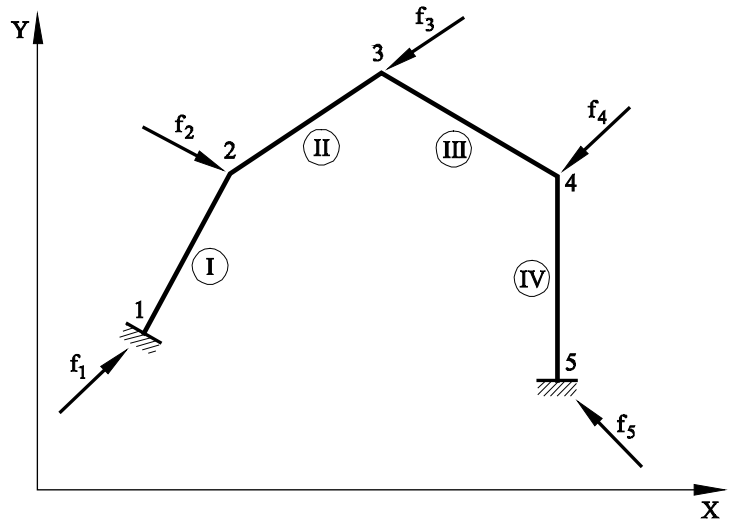


Figura 6.3: Estructura reticulada plana auxiliar para definir la matriz de transferencia

$$\left(\mathbf{S}_a\right)_I = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{d}_a\right)_I \\ \left(\mathbf{f}_a\right)_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

donde $\mathbf{f}_1$ es el vector de reacciones desconocido en el apoyo 1. El vector de estado en el extremo opuesto *b* se obtiene aplicando la ecuación (6.5):

$$\left(\mathbf{S}_b\right)_I = \mathbf{G}_I \left(\mathbf{S}_a\right)_I \tag{6.11}$$

De forma análoga, en el elemento siguiente II = I+1:

$$\left(\mathbf{S}_b\right)_{II} = \mathbf{G}_{II} \left(\mathbf{S}_a\right)_{II} \tag{6.12}$$

Las condiciones de compatibilidad y equilibrio en el nudo 2 se expresan por:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{d}_b\right)_I &= \left(\mathbf{d}_a\right)_{II} \\ \left(\mathbf{f}_b\right)_I + \left(\mathbf{f}_a\right)_{II} &= \mathbf{f}_2 \end{aligned} \tag{6.13}$$

donde $\mathbf{f_2}$ es el vector de fuerzas exteriores aplicadas en el nudo. La ecuación anterior agrupando términos para obtener los vectores de estado es:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{d}_a)_{II} \\ (\mathbf{f}_a)_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_b)_{I} \\ (\mathbf{f}_b)_{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

Escribiendo de forma compacta la ecuación anterior se tiene:

$$(\mathbf{S}_a)_{II} = \mathbf{U}\,(\mathbf{S}_b)_I + \mathbf{s}_2 \quad \text{con} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (6.10) y sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$(\mathbf{S}_a)_{II} = \mathbf{U}\,\mathbf{G}_I\,(\mathbf{S}_a)_I + \mathbf{s}_2 \tag{6.16}$$

Avanzando de forma análoga en la estructura, para las barras restantes se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_a)_{III} &= \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\,(\mathbf{S}_a)_{II} + \mathbf{s}_3 = \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\left(\mathbf{U}\,\mathbf{G}_I(\mathbf{S}_a)_I + \mathbf{s}_2\right) + \mathbf{s}_3 \\ &= \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_I(\mathbf{S}_a)_I + \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_a)_{IV} &= \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\,(\mathbf{S}_a)_{III} + \mathbf{s}_4 \\ &= \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\left(\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_I(\mathbf{S}_a)_I + \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3\right) + \mathbf{s}_4 \\ &= \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_I(\mathbf{S}_a)_I + \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{s}_2 + \mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{s}_3 + \mathbf{s} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_b)_{IV} = \mathbf{G}_{IV}(\mathbf{S}_a)_{IV} &= \mathbf{G}_{IV}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_I(\mathbf{S}_a)_I + \\ &+ \mathbf{G}_{IV}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{s}_2 + \mathbf{G}_{IV}\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{s}_3 + \mathbf{G}_{IV}\mathbf{s}_4 \end{aligned} \tag{6.19}$$

que de forma compacta es igual a:

$$\left(\mathbf{S}_b\right)_{IV} = \mathbf{G}\left(\mathbf{S}_a\right)_I + \mathbf{c} \tag{6.20}$$

con:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_{IV}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{I} \\ \mathbf{c} &= \mathbf{G}_{IV}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{II}\mathbf{s}_2 + \mathbf{G}_{IV}\,\mathbf{U}\,\mathbf{G}_{III}\mathbf{s}_3 + \mathbf{G}_{IV}\mathbf{s}_4 \end{aligned} \tag{6.21}$$

donde **G** es la matriz de transferencia de la estructura y **c** es el vector que relaciona las cargas exteriores sobre toda la estructura.

Debe tenerse en cuenta que aunque las matrices **G** y **c** hacen referencia a la estructura en su totalidad, tienen las mismas dimensiones asociadas a cada barra:

$$\begin{aligned} &\mathbf{G} \rightarrow\ 6\times 6 \qquad \mathbf{G}_i \rightarrow\ 6\times 6 \qquad \text{para } i = I, II, III, ..., n \\ &\mathbf{c} \rightarrow\ 6\times 1 \qquad \mathbf{f}_j \rightarrow\ 6\times 1 \qquad \mathbf{S} \rightarrow\ 6\times 1 \end{aligned} \tag{6.22}$$

La matriz **G** obtenida como producto de las matrices de transferencia de las barras de la estructura y de las matrices **U** que materializan el equilibrio del nudo, y el vector **c** pueden escribirse de forma compacta:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a \\ \mathbf{c}_b \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

donde las dimensiones de $\mathbf{G}_{ij}$ son de 3x3 y las de $\mathbf{c}_i$ son de 3x1.

Como puede verse en la Figura 6.3, los vectores $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_5$ representan las reacciones desconocidas en los empotramientos 1 y 5 respectivamente. Aplicando los conceptos anteriores, puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{aa} & \mathbf{G}_{ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_a \\ \mathbf{c}_b \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Por tanto, las reacciones en los nudos 1 y 5 (Figura 6.3) pueden calcularse a partir de:

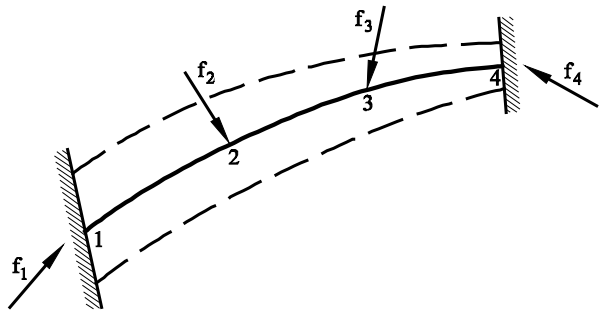


Figura 6.4:Viga biempotrada de inercia variable con cargas en puntos intermedios

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{G}_{ab}^{-1}\,\mathbf{c}_a$$
$$\mathbf{f}_5 = -\mathbf{G}_{bb}\,\mathbf{G}_{ab}^{-1}\,\mathbf{c}_a + \mathbf{c}_b \qquad (6.25)$$

De las expresiones anteriores se deduce fácilmente que una vez calculado el vector de reacciones en el nudo 1 de la estructura, es posible calcular el vector de estado en un punto cualquiera de la misma, sin más que aplicar:

$$\left(\mathbf{S}_b\right)_I = \mathbf{G}_I\,\left(\mathbf{S}_a\right)_I$$
$$\left(\mathbf{S}_a\right)_{II} = \mathbf{U}\,\mathbf{G}_I\,\left(\mathbf{S}_a\right)_I + \mathbf{f}_2 \qquad \text{etc...} \qquad (6.26)$$

La utilización de las matrices de transferencia proporciona un método sistemático para hallar las reacciones de empotramiento en piezas no rectas o de inercia variable (Figura 6.4). Estos valores son de gran utilidad en el método matricial porque permiten el traslado de cargas a los nudos (ver Capítulo 2).

6.4. ESTRUCTURAS RETICULADAS CON SOPORTES INTERMEDIOS

Una tipología estructural muy frecuente es la de estructura porticada sobre soportes intermedios como, por ejemplo, la que se muestra en la Figura 6.5. La principal característica de estas estructuras es que cada nudo tiene una conexión directa con la sustentación, además de estar unido a los adyacentes.

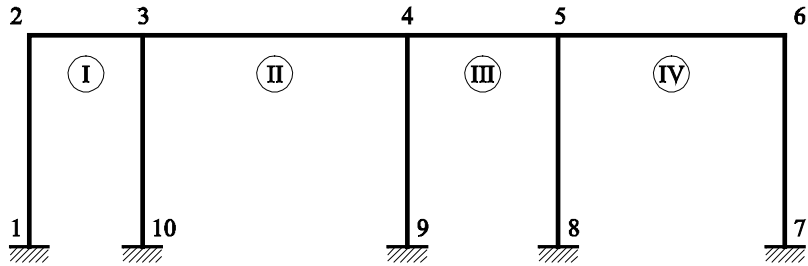


Figura 6.5: Estructura reticulada con soportes intermedios

Supónganse conocidas las matrices globales de transferencia de cada barra y las acciones exteriores en cada nudo de la estructura:

$$\mathbf{G}_I\ ,\mathbf{G}_{II}\ ,\mathbf{G}_{III}\ ,\mathbf{G}_{IV}$$
$$\mathbf{f}_2\ ,\mathbf{f}_3\ ,\mathbf{f}_4\ ,\mathbf{f}_5\ ,\mathbf{f}_6$$

Si el nudo *J* sufre un movimiento $\mathbf{d}_J$, el soporte que incide sobre dicho nudo está sometido a un esfuerzo en su extremo *b* que se expresa por:

$$\left(\mathbf{f}_b\right)_{12} = \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{12}\mathbf{d}_J \tag{6.27}$$

Si se prescinde del soporte 12, el vector de estado en el extremo *b* de la barra *ficticia* 02, es:

$$\left(\mathbf{S}_b\right)_{02} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{6.28}$$

La condición de compatibilidad en el nudo 2 ahora es:

$$\left(\mathbf{d}_b\right)_{02} = \mathbf{d}_2 = \left(\mathbf{d}_a\right)_{23} \tag{6.29}$$

y la condición de equilibrio puede escribirse como:

$$\left(\mathbf{f}_a\right)_{23} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_{12}\mathbf{d}_2 = \mathbf{f}_2 \tag{6.30}$$

Si se escriben las dos últimas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{d}_a)_{23} \\ (\mathbf{f}_a)_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{bb})_{12} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

o bien de forma compacta:

$$(\mathbf{S}_a)_{23} = \mathbf{V}_I (\mathbf{S}_b)_{02} + \mathbf{f}_2 \tag{6.32}$$

Nótese que la matriz **V** coincide con la matriz **U** cuando la submatriz $(\mathbf{K}_{bb})_{12}$ es nula.

De forma análoga a lo realizado en el apartado anterior, puede utilizarse la matriz de transferencia de la barra 23 para relacionar los vectores de estado de los extremos *a* y *b* de la misma.

$$(\mathbf{S}_b)_{23} = \mathbf{G}_{23}(\mathbf{S}_a)_{23} = \mathbf{G}_{23}\mathbf{V}_I(\mathbf{S}_b)_{02} + \mathbf{G}_{23}\,\mathbf{f}_2 \tag{6.33}$$

Repitiendo el proceso en el nudo 3, la condición de compatibilidad se expresa por:

$$(\mathbf{d}_a)_{34} = (\mathbf{d}_b)_{23} = \mathbf{d}_3 \tag{6.34}$$

y la condición de equilibrio puede escribirse como:

$$(\mathbf{f}_a)_{34} + (\mathbf{f}_b)_{23} + (\mathbf{K}_{bb})_{3-10}\mathbf{d}_3 = \mathbf{f}_3 \tag{6.35}$$

Por tanto:

$$(\mathbf{S}_a)_{34} = \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_a)_{34} \\ (\mathbf{f}_a)_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{bb})_{3-10} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{d}_b)_{23} \\ (\mathbf{f}_b)_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

o bien de forma compacta:

$$(\mathbf{S}_a)_{34} = \mathbf{V}_{II} (\mathbf{S}_b)_{23} + \mathbf{s}_3 \tag{6.37}$$

y así sucesivamente. Una vez completado el proceso anterior se obtiene una relación matricial similar a la que se expresa en la ecuación (6.19), en la que interviene además la rigidez de los soportes.

6.5. MÉTODO DE ANÁLISIS POR SUBESTRUCTURAS

En el caso de que la estructura a analizar sea compleja, puede ser de interés resolverla dividiéndola en partes más simples unidas en ciertos puntos. Hay que resaltar que para no restar eficacia al método debe procurarse minimizar los puntos de corte de la estructura.

En el esquema de la Figura 6.6 supóngase que los puntos de unión son dos, *A* y *B*. Cortando la estructura en *A* y *B* y aplicando en los cortes los pares de fuerzas iguales y opuestas que una parte transmite a la otra, se reduce la estructura a dos más sencillas que pueden resolverse por separado.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_j \\ \mathbf{R}_A \\ \mathbf{R}_B \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{d}_j \\ \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{j+1} \\ \mathbf{f}_{j+2} \\ \cdots \\ \mathbf{f}_n \\ -\mathbf{R}_A \\ -\mathbf{R}_B \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{j+1} \\ \mathbf{d}_{j+2} \\ \cdots \\ \mathbf{d}_n \\ \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \tag{6.38}$$

donde $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$ (Figura 6.7) son las fuerzas en las respectivas secciones de corte que son desconocidas y por tanto, no puede resolverse el problema.

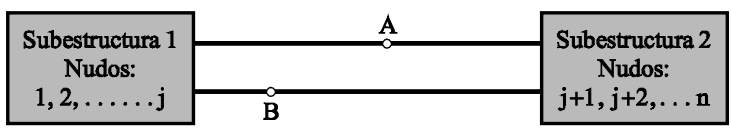


Figura 6.6: Esquema de un análisis por subestructuras

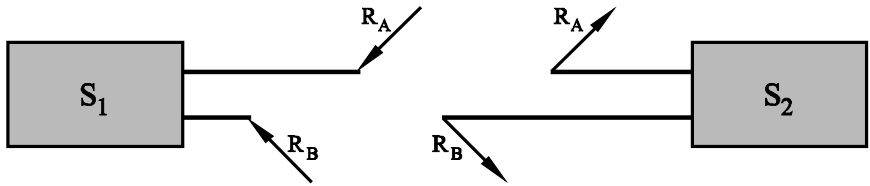


Figura 6.7: Esfuerzos en los cortes de las subestructuras consideradas

Sin embargo, sí que se puede realizar el proceso de eliminación en el sistema de ecuaciones (6.38) en la forma usual, eliminando todos los coeficientes de los movimientos de los nudos $\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_2,..\mathbf{d}_j$ en las ecuaciones de equilibrio de los nudos *A* y *B*.

De esta manera se obtienen las dos últimas ecuaciones de (6.38) reducidas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A + \mathbf{\Phi}_{A1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,.....\mathbf{f}_j\right) \\ \mathbf{R}_B + \mathbf{\Phi}_{B1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,.....\mathbf{f}_j\right) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^* \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

donde $\mathbf{\Phi}_{A1}$ y $\mathbf{\Phi}_{B1}$ son combinaciones lineales de las cargas conocidas aplicadas en los nudos 1 a *j* que se suman a las incógnitas $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$. La matriz $\mathbf{K}_1^*$ es la matriz de rigidez modificada de la subestructura 1 que vincula los movimientos en los nudos *A* y *B*, con los esfuerzos generados por los mismos. La ecuación anterior puede escribirse también como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_A \\ \mathbf{R}_B \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^* \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{A1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,.....\mathbf{f}_j\right) \\ \mathbf{\Phi}_{B1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,.....\mathbf{f}_j\right) \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

Fácilmente puede interpretarse que los vectores $\mathbf{\Phi}_{A1}$ y $\mathbf{\Phi}_{B1}$ representan las fuerzas que la estructura ejercería sobre los nudos *A* y *B* si estuvieran perfectamente empotrados.

Procediendo de forma análoga para la subestructura 2, puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{R}_A + \mathbf{\Phi}_{A2}\left(\mathbf{f}_{j+1},\mathbf{f}_{j+2},.....\mathbf{f}_n\right) \\ -\mathbf{R}_B + \mathbf{\Phi}_{B2}\left(\mathbf{f}_{j+1},\mathbf{f}_{j+2},.....\mathbf{f}_n\right) \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2^* \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

donde $\mathbf{\Phi}_{A2}$ y $\mathbf{\Phi}_{B2}$ representan el vector de fuerzas de empotramiento perfecto debidos a las fuerzas externas $\mathbf{f}_{j+1}$, $\mathbf{f}_{j+2}$,...$\mathbf{f}_n$, en *A* y *B*, respectivamente, en la subestructura 2. La matriz $\mathbf{K}_2^*$ es la matriz de rigidez de la subestructura 2 que vincula los movimientos en los nudos *A* y *B* con los esfuerzos generados por los mismos.

Si se compatibilizan los movimientos de *A* y *B*:

$$\left(\mathbf{K}_1^*\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{R}_A+\mathbf{\Phi}_{A1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,..\mathbf{f}_j\right)\\ \mathbf{R}_B+\mathbf{\Phi}_{B1}\left(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,..\mathbf{f}_j\right)\end{bmatrix}=\left(\mathbf{K}_2^*\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\mathbf{R}_A+\mathbf{\Phi}_{A2}\left(\mathbf{f}_{j+1,1},..\mathbf{f}_n\right)\\ -\mathbf{R}_B+\mathbf{\Phi}_{B2}\left(\mathbf{f}_{j+1,1},..\mathbf{f}_n\right)\end{bmatrix} \quad (6.42)$$

o bien:

$$\left[\left(\mathbf{K}_1^*\right)^{-1}+\left(\mathbf{K}_2^*\right)^{-1}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{R}_A\\ \mathbf{R}_B\end{bmatrix}=-\left(\mathbf{K}_1^*\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{A1}\\ \mathbf{\Phi}_{B1}\end{bmatrix}+\left(\mathbf{K}_2^*\right)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_{A2}\\ \mathbf{\Phi}_{B2}\end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Calculando las fuerzas en los cortes $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$ puede obtenerse la solución completa sin más que resolver las ecuaciones correspondientes.

Nótese que el sentido de los cortes, en este análisis por subestructuras, no busca la obtención de estructuras isostáticas como sucede en el método de compatibilidad sino que simplemente busca la partición de la estructura en otras más sencillas con un determinado grado de hiperestaticidad. Este método es de utilidad en aquellas estructuras en las que el ancho de banda es muy grande, descomponiéndolas en otras con un ancho de banda menor.

La idea de subestructura es una generalización del concepto de barra. En efecto, cada bloque parcial de la estructura original se considera como una barra aislada sometida a unos esfuerzos en los extremos a los que se le suman unas cargas $\mathbf{\Phi}$ que son equivalentes a las fuerzas de empotramiento perfecto en los cortes efectuados.

Las ecuaciones elásticas de cada subestructura considerada como una *barra ficticia j* son:

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{f}_a\right)_j+\left(\mathbf{\Phi}_a\right)_j&=\left(\mathbf{K}_{aa}\right)_j\mathbf{d}_a+\left(\mathbf{K}_{ab}\right)_j\mathbf{d}_b\\ \left(\mathbf{f}_b\right)_j+\left(\mathbf{\Phi}_b\right)_j&=\left(\mathbf{K}_{ba}\right)_j\mathbf{d}_a+\left(\mathbf{K}_{bb}\right)_j\mathbf{d}_b\end{aligned} \quad (6.44)$$

En una estructura como la representada por el esquema de la Figura 6.8, por compatibilidad entre los movimientos de los extremos de barra y de los nudos a los que concurren debe cumplirse:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{b1} &= \mathbf{d}_{a2} = \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_{b2} &= \mathbf{d}_{a3} = \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_{b3} &= \mathbf{d}_{a1} = \mathbf{d}_C \end{aligned} \tag{6.45}$$

Aplicando las condiciones de equilibrio en los nudos, puede escribirse:

Por equilibrio en el nudo A

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A + \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_1 &= \left(\mathbf{K}_{ba}\right)_1 \mathbf{d}_{a1} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_1 \mathbf{d}_{b1} \\ -\mathbf{R}_A + \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_2 &= \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_2 \mathbf{d}_{a2} + \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_2 \mathbf{d}_{b2} \end{aligned} \tag{6.46}$$

Por equilibrio en el nudo B:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B + \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_2 &= \left(\mathbf{K}_{ba}\right)_2 \mathbf{d}_{a2} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_2 \mathbf{d}_{b2} \\ -\mathbf{R}_B + \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_3 &= \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_3 \mathbf{d}_{a3} + \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_3 \mathbf{d}_{b3} \end{aligned} \tag{6.47}$$

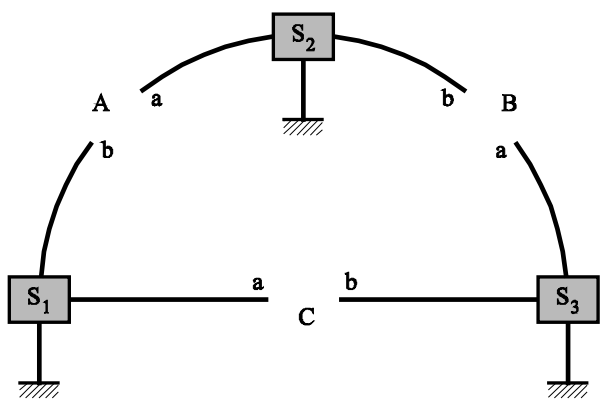


Figura 6.8: Ensamblaje de subestructuras

Por equilibrio en el nudo C:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_C + \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_1 &= \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_1 \mathbf{d}_{a1} + \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_1 \mathbf{d}_{b1} \\ -\mathbf{R}_C + \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_3 &= \left(\mathbf{K}_{ba}\right)_3 \mathbf{d}_{a3} + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_3 \mathbf{d}_{b3} \end{aligned} \tag{6.48}$$

y escribiendo en forma matricial las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_1 + \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_2 \\ \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_2 + \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_3 \\ \left(\mathbf{\Phi}_a\right)_1 + \left(\mathbf{\Phi}_b\right)_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_1 + \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_2 & \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_1 & \left(\mathbf{K}_{ba}\right)_3 \\ \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_3 & \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_2 + \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_3 & \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_3 \\ \left(\mathbf{K}_{ab}\right)_1 & \left(\mathbf{K}_{ba}\right)_3 & \left(\mathbf{K}_{aa}\right)_1 + \left(\mathbf{K}_{bb}\right)_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \\ \mathbf{d}_C \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

Observando la ecuación anterior es fácil deducir que resulta del ensamblaje de las subestructuras, consideradas como barras ficticias, y que puede llegarse al mismo resultado siguiendo las reglas de ensamblaje descritas en el Capítulo 3 para una estructura reticulada.

Resumiendo lo anterior, puede decirse que el proceso de análisis por subestructuras se basa en los siguientes conceptos:

- La estructura se divide en dos o más subestructuras, cada una de ellas con un determinado grado de hiperestaticidad.
- La división de la estructura en subestructuras permite trabajar con matrices de menor ancho de banda, con el consiguiente ahorro de memoria.
- La idea de subestructura es una generalización del concepto de barra. El método se basa en considerar cada bloque de la estructura original como una *barra ficticia*.
- Cada una de las barras ficticias tiene sus respectivas matrices de rigidez modificada **K*** y sus respectivos esfuerzos de empotramiento perfecto **Φ** en las secciones de corte.

A continuación, se resuelven algunos ejemplos de aplicación del método de subestructuras. En ellos puede observarse que aunque el número de operaciones matriciales aumenta, la reducción de las matrices de rigidez con las que se trabaja es notable.

Ejemplo 6.5.1

Aplicando el método de análisis por subestructuras, resolver la estructura de la Figura 6.9a bajo las cargas que se indican. Suponer que la rigidez a axil es $EA = 10^7$ kN y la rigidez a flexión es $E\,I = 10^5$ kN·m^2 .
Datos: a=5m; p= 20 kN/m y P_x =50 kN.

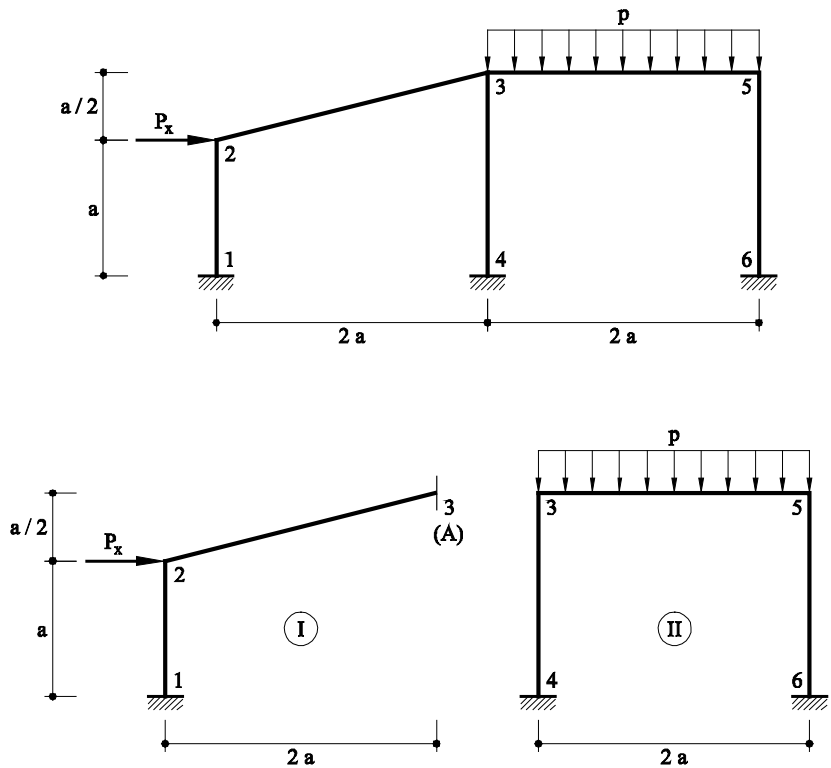


Figura 6.9: (a) Estructura del Ejemplo 6.5.1 (b) subestructuras I y II

Como ejemplo del método de análisis por subestructuras se resuelve la estructura cortando la misma por la barra 23, suponiendo el corte muy próximo al nudo 3 (Figura 6.9b).

Teniendo presente que la idea de subestructura es una generalización del concepto de barra y que se puede considerar cada

bloque de la estructura original como una *barra ficticia* se calculan sus respectivas matrices de rigidez modificada **K*** y sus respectivos esfuerzos de empotramiento perfecto **Φ** en las secciones de corte.

Para calcular las matrices de rigidez modificada de cada subestructura se considera empotrada la sección de corte *A*(3) y se calculan los esfuerzos que se obtienen al imponer un movimiento unitario en el grado de libertad *j* proporcionan la columna *j-ésima* de la matriz **K***.

En la figura 6.10 se muestran los esfuerzos obtenidos al resolver la subestructura I para cada movimiento de la sección *A*, expresándose las fuerzas en kN y los momentos en kN·m.

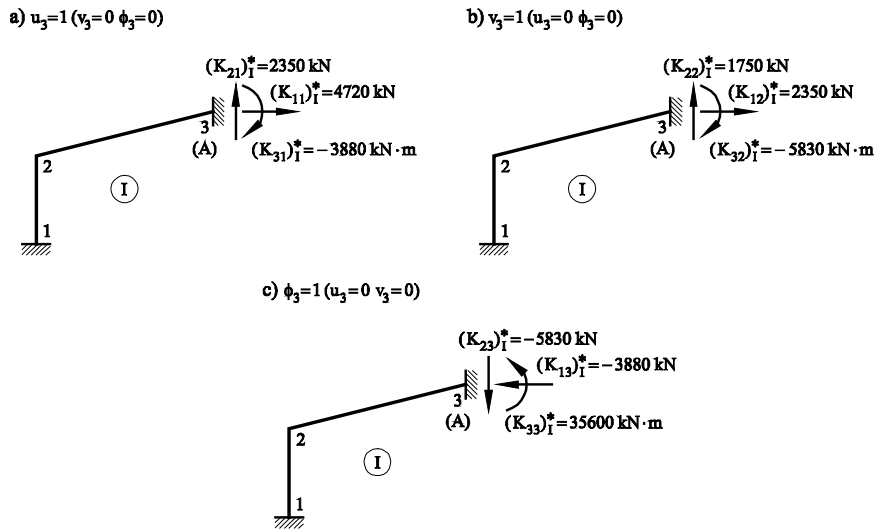


Figura 6.10: Subestructura I. Términos de la matriz K_I^*

Por tanto, la matriz de rigidez $\mathbf{K}_I^*$ toma la forma siguiente:

$$\mathbf{K}_I^* = \begin{bmatrix} 4720 & 2350 & -3880 \\ 2350 & 1750 & -5830 \\ -3880 & -5830 & 35600 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de rigidez $\mathbf{K}_I^*$ se obtiene:

$$\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 1665,55 & -3590,97 & -406,546 \\ -3590,97 & 8999,70 & 1082,45 \\ -406,546 & 1082,45 & 161,048 \end{bmatrix}$$

Procediendo de igual manera para la subestructura II se obtienen los esfuerzos para cada movimiento de la sección *A* en dicha subestructura, como se muestra en la Figura 6.11. Las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

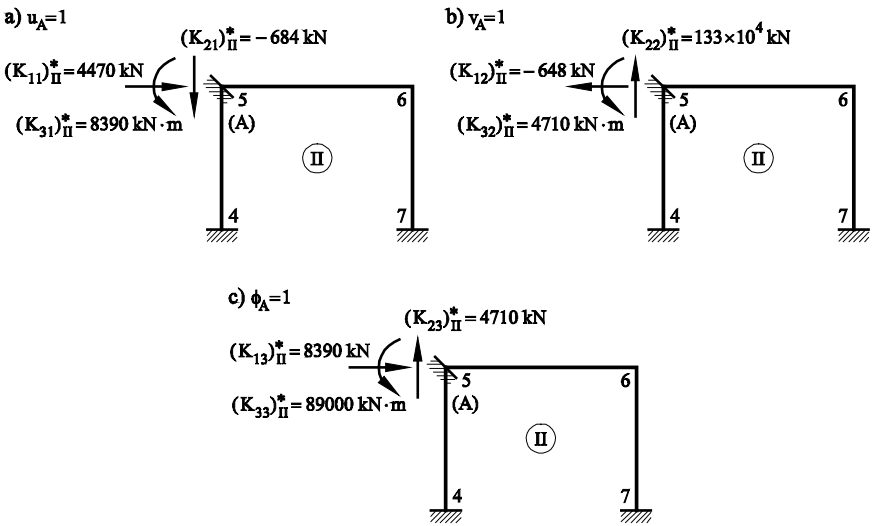


Figura 6.11: Subestructura II. Términos de la matriz K_{II}^*

Por tanto, la matriz de rigidez $\mathbf{K}_{II}^*$ tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{K}_{II}^* = \begin{bmatrix} 4470 & -684 & 8390 \\ -684 & 1330000 & 4710 \\ 8390 & 4710 & 89000 \end{bmatrix}$$

y su inversa:

$$\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 271,878 & 0,2306 & -25,642 \\ 0,2306 & 0,7522 & -0,0616 \\ -25,642 & -0,0616 & 13,6565 \end{bmatrix}$$

La suma de las inversas de las matrices $\mathbf{K}_I^*$ y $\mathbf{K}_{II}^*$ proporciona el primer factor de la ecuación (6.43):

$$\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}+\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}=10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}1937,428 & -3590,739 & -432,188\\ -3590,739 & 9000,452 & 1082,388\\ -432,188 & 1082,388 & 174,705\end{bmatrix}$$

El paso siguiente consiste en calcular los esfuerzos de empotramiento perfecto $\mathbf{\Phi}_{AI}$ y $\mathbf{\Phi}_{AII}$, para ello se resuelve cada subestructura con las cargas que actúan sobre ellas, considerando empotrada la sección de corte *A*.

En la Figura 6.12 se muestran las reacciones de empotramiento perfecto de las subestructuras I y II y los distintos términos de los vectores $\mathbf{\Phi}_{AI}$ y $\mathbf{\Phi}_{AII}$.

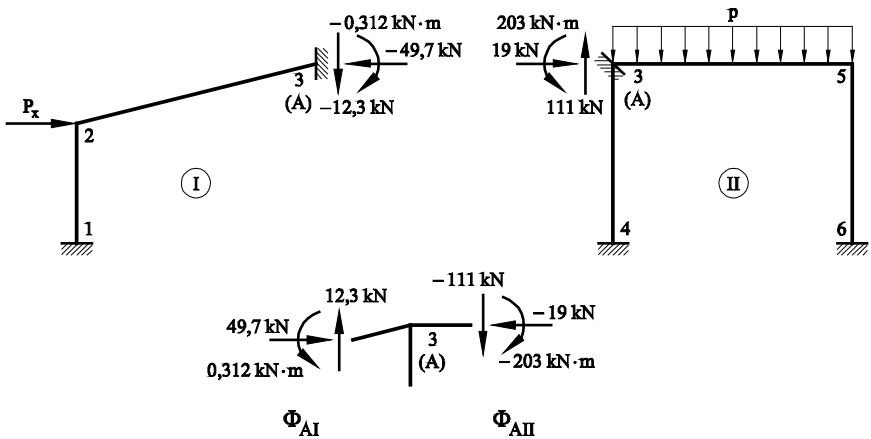


Figura 6.12 Reacciones de empotramiento perfecto en A en las subestructuras I y II

Los vectores que contienen los esfuerzos de empotramiento perfecto son:

$$\mathbf{\Phi}_{AI}=\begin{bmatrix}49,7\\ 12,3\\ 0,312\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad \mathbf{\Phi}_{AII}=\begin{bmatrix}-19,0\\ -111\\ -203\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Finalmente, las fuerzas de interacción entre las subestructuras 1 y 2 se obtienen resolviendo la ecuación (6.43), que en este caso resulta:

$$\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}+\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{R}_A\right]=-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AI}\right]+\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AII}\right]$$

Calculando cada uno de los términos de la derecha se obtiene:

$$-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AI}\right]=-10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}1665,55 & -3590,97 & -406,546\\ -3590,97 & 8999,70 & 1082,45\\ -406,546 & 1082,45 & 161,048\end{bmatrix}\begin{bmatrix}49,7\\ 12.3\\ 0,312\end{bmatrix}$$

$$=\ 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}-38482,559\\ 67437,175\\ 6840,954\end{bmatrix}$$

$$\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AII}\right]=10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}271,878 & 0,2306 & -25,642\\ 0,2306 & 0,7522 & -0,0616\\ -25,642 & -0,0616 & 13,6565\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-19\\ -111\\ -203\end{bmatrix}$$

$$=10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}14,047\\ -75,371\\ -2278,23\end{bmatrix}$$

La suma de estos dos últimos vectores resulta:

$$-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\Phi_{AI}\right]+\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\Phi_{AII}\right]=10^{-6}\begin{bmatrix}-38468,512\\ 67361,804\\ 4562,724\end{bmatrix}$$

Resolviendo ahora la ecuación matricial:

$$10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}1937,428 & -3590,739 & -432,188\\ -3590,739 & 9000,452 & 1082,388\\ -432,188 & 1082,388 & 174,705\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{Ax}\\ R_{Ay}\\ M_A\end{bmatrix}=10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}-38468,512\\ 67361,804\\ 4562,724\end{bmatrix}$$

Se obtienen las fuerzas de interacción $\mathbf{R}_A$:

$$\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23{,}022 \\ 7{,}876 \\ -79{,}632 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

Del resultado obtenido se concluye que la estructura del Ejemplo 6.5.1 puede analizarse considerando las subestructuras I y II bajo las cargas que se muestran en la Figura 6.13.

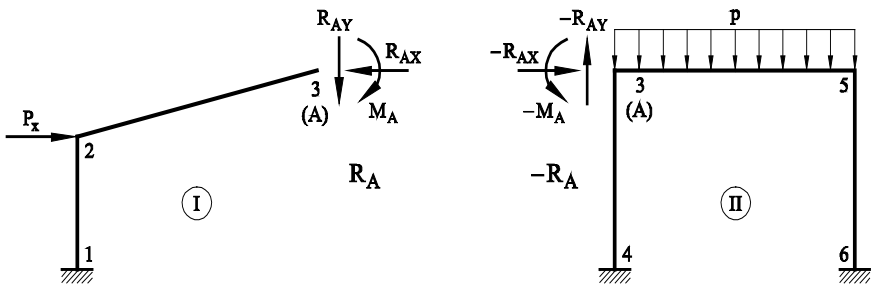


Figura 6.13: Subestructuras a resolver matricialmente

Por tanto, resolviendo las subestructuras I y II y superponiendo los resultados se obtienen los movimientos de los nudos 2, 3 y 5 de la estructura total:

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}23 \\ 0{,}0039 \\ -0{,}538 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \qquad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}23 \\ -0{,}0804 \\ 1{,}78 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\mathbf{d}_5 = \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}23 \\ -0{,}0754 \\ 1{,}69 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

La numeración de los nudos puede verse en la Figura 6.9. Los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes. Las reacciones de la estructura en los nudos empotrados 1, 4 y 6 resultan:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27{,}0 \\ -7{,}8 \\ 78{,}8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}9 \\ 107{,}0 \\ -2{,}3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_{x6} \\ F_{y6} \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -29{,}9 \\ 101{,}0 \\ 89{,}8 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Las leyes de esfuerzos y la deformada pueden verse en la Figura 6.14.

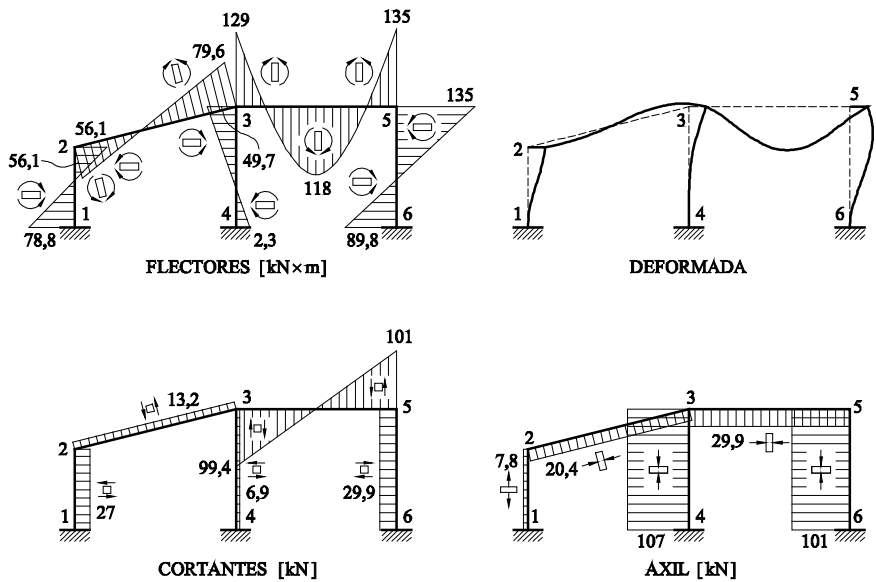


Figura 6.14: Leyes de esfuerzos y deformada de la estructura del Ejemplo 6.5.1

Ejemplo 6.5.2

Aplicando el método de análisis por subestructuras, resolver la estructura de la Figura 6.15 bajo las cargas que se indican. Los dinteles están formados por perfiles metálicos IPN 180 y los pilares por perfiles metálicos IPN 220.

Datos: a = 3m ; b = 4 m ; p = 10 kN/m ; P_x =5 kN y E = 210 GPa.

IPN 220: $A_1 = 39{,}60\ cm^2$; $I_1 = 3060\ cm^4$

IPN 180: $A_2 = 27{,}90\ cm^2$; $I_2 = 1450\ cm^4$

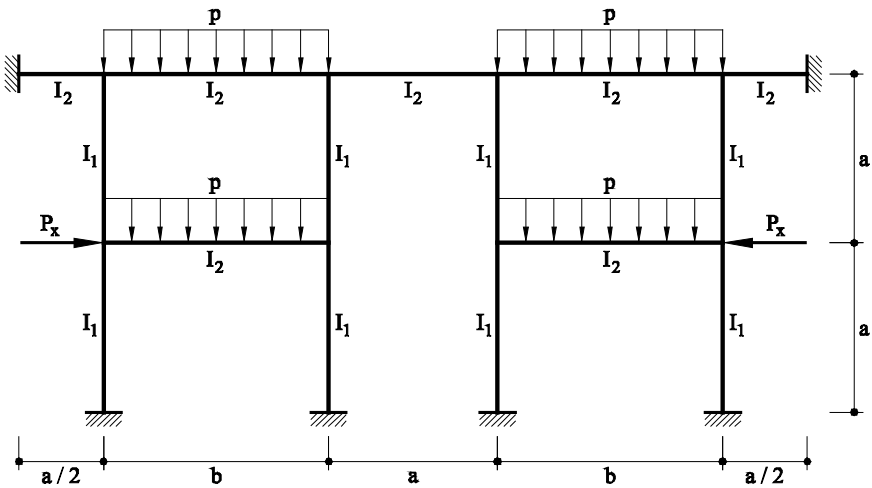


Figura 6.15: Estructura del Ejemplo 6.5.2

La geometría y el estado de cargas de la estructura son simétricos, para resolverla puede dividirse en dos subestructuras cortando por la sección *A* situada sobre el eje de simetría (ver Figura 6.16).

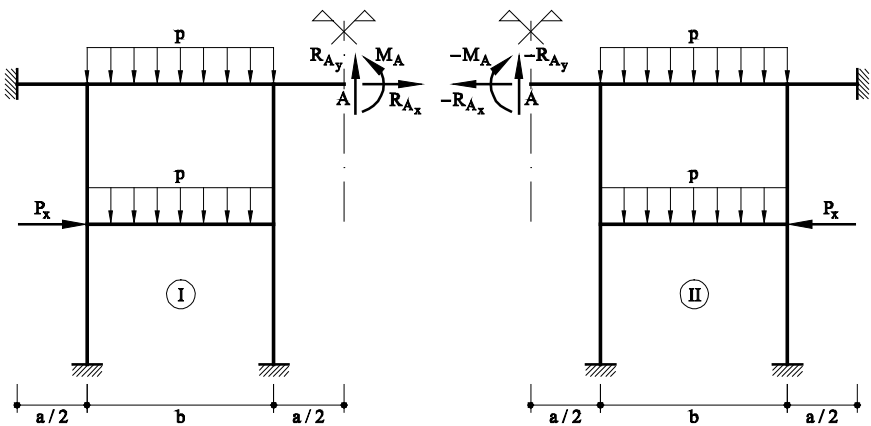


Figura 6.16: Subestructuras I y II

Para calcular las matrices de rigidez de cada subestructura, se considera empotrada la sección de corte *A* y se calculan los esfuerzos que se producen al dar un movimiento unitario a cada grado de libertad

de dicha sección. De esta forma, los esfuerzos que se obtienen al imponer un movimiento unitario en el grado de libertad *j* proporcionan la columna j-ésima de la matriz K_I^* (ver Apartado 2.7).

En la Figura 6.17 se muestran los esfuerzos obtenidos al resolver la subestructura I para cada movimiento de la sección *A*, donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m. Por tanto, la matriz de rigidez $\mathbf{K}_I^*$ toma la forma siguiente:

$$\mathbf{K}_I^* = \begin{bmatrix} 84138{,}87 & 718{,}05 & -348{,}74 \\ 718{,}05 & 6606{,}04 & -5872{,}28 \\ -348{,}74 & -5872{,}28 & 6877{,}62 \end{bmatrix}$$

Invirtiendo la matriz de rigidez $\mathbf{K}_I^*$ se obtiene:

$$\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 11{,}9033 & -3{,}1422 & -2{,}0793 \\ -3{,}1422 & 628{,}913 & 536{,}822 \\ -2{,}0793 & 536{,}822 & 603{,}646 \end{bmatrix}$$

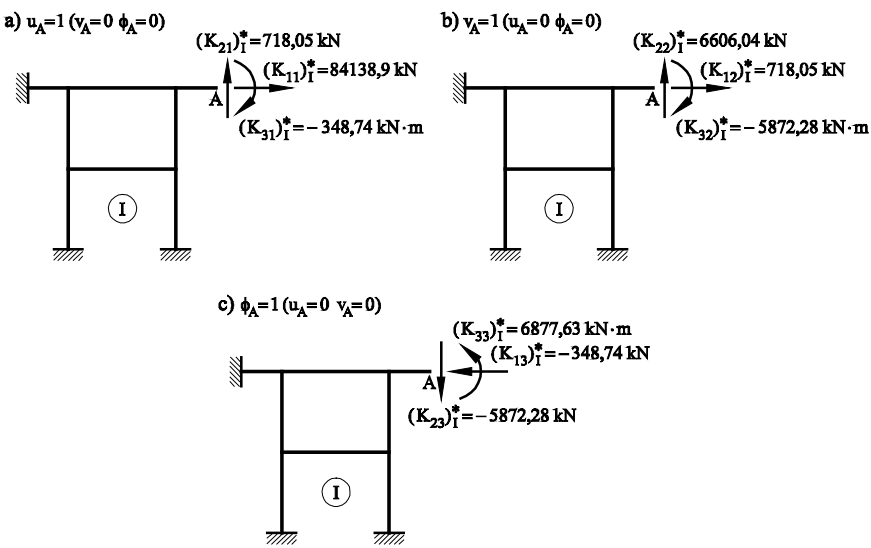


Figura 6.17: Subestructura I. Términos de la matriz K_I^*

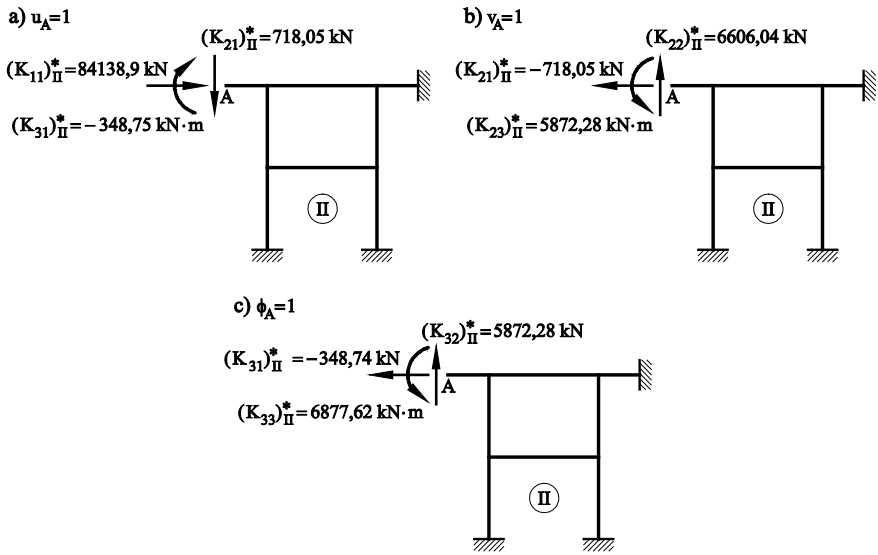


Figura 6.18: Subestructura II. Términos de la matriz K_{II}^*

Procediendo de igual manera para la subestructura II se obtienen los esfuerzos para cada movimiento de la sección *A* en dicha subestructura, como se muestra en la Figura 6.18. Las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

Por tanto, la matriz de rigidez $\mathbf{K}_{II}^*$ tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{K}_{II}^* = \begin{bmatrix} 84138,87 & -718,05 & -348,74 \\ -718,05 & 6606,04 & 5872,28 \\ -348,74 & 5872,28 & 6877,62 \end{bmatrix}$$

y su inversa:

$$\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1} = 10^{-6} \cdot \begin{bmatrix} 11,9033 & 3,1422 & -2,0793 \\ 3,1422 & 628,913 & -536,822 \\ -2,0793 & -536,822 & 603,646 \end{bmatrix}$$

La suma de las inversas de las matrices $\mathbf{K}_{I}^*$ y $\mathbf{K}_{II}^*$ proporciona el primer factor de la ecuación (6.43):

$$\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}+\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}=10^{-6}\cdot\begin{bmatrix}23{,}8066 & 0 & -4{,}1586\\ 0 & 1257{,}826 & 0\\ -4{,}1586 & 0 & 1207{,}29\end{bmatrix}$$

El paso siguiente consiste en calcular los esfuerzos de empotramiento perfecto $\mathbf{\Phi}_{AI}$ y $\mathbf{\Phi}_{AII}$, resolviendo cada subestructura con las cargas que actúan sobre ellas, considerando empotrada la sección de corte *A*.

En la Figura 6.19 se muestran los esfuerzos de la subestructura I y los distintos términos de los vectores $\mathbf{\Phi}_{AI}$ y $\mathbf{\Phi}_{AII}$. Los vectores que contienen los esfuerzos de empotramiento perfecto son:

$$\mathbf{\Phi}_{AI}=\begin{bmatrix}-1{,}97\\ 4{,}03\\ -1{,}36\end{bmatrix}\qquad \text{y}\qquad \mathbf{\Phi}_{AII}=\begin{bmatrix}1{,}97\\ 4{,}03\\ 1{,}36\end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

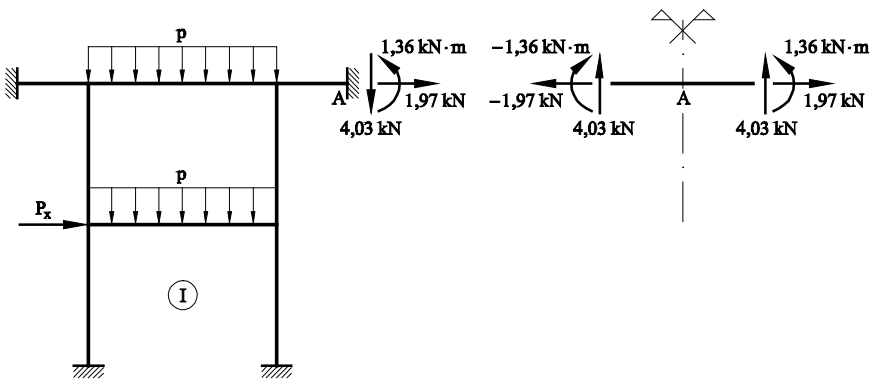


Figura 6.19: Esfuerzos en la subestructura I y esfuerzos de empotramiento perfecto en A

No se muestra la subestructura *II* ya que en este caso es simétrica con respecto a la subestructura *I*. Finalmente, las fuerzas de interacción entre las subestructuras 1 y 2 se obtienen resolviendo la ecuación (6.43), que en este caso resulta:

$$\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}+\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{R}_A\right]=-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AI}\right]+\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AII}\right]$$

Calculando cada uno de los términos de la derecha se obtiene:

$$-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AI}\right] = -10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 11,9033 & -3,1422 & -2,0793 \\ -3,1422 & 628,913 & 536,822 \\ -2,0793 & 536,822 & 603,646 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,97 \\ 4,03 \\ -1,36 \end{bmatrix} =$$

$$= 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 33,2846 \\ -1810,63 \\ -1346,53 \end{bmatrix}$$

$$+\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\mathbf{\Phi}_{AII}\right] = 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 11,9033 & -3,1422 & -2,0793 \\ -3,1422 & 628,913 & 536,826 \\ -2,0793 & 536,822 & 603,646 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,97 \\ 4,03 \\ 1,36 \end{bmatrix} =$$

$$= 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 33,2846 \\ 1810,63 \\ -1346,53 \end{bmatrix}$$

La suma de estos dos últimos vectores resulta:

$$-\left[\left(\mathbf{K}_I^*\right)^{-1}\right]\left[\Phi_{AI}\right]+\left[\left(\mathbf{K}_{II}^*\right)^{-1}\right]\left[\Phi_{AII}\right] = 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 66,5694 \\ 0 \\ -2693,50 \end{bmatrix}$$

Resolviendo ahora la ecuación matricial:

$$10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 23,8066 & 0 & -4,1586 \\ 0 & 1257,82 & 0 \\ -4,1586 & 0 & 1207,29 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = 10^{-6}\cdot\begin{bmatrix} 66,5694 \\ 0 \\ -2693,50 \end{bmatrix}$$

Se obtienen las fuerzas de interacción:

$$\mathbf{R}_A = \begin{bmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,41 \\ 0 \\ -2,23 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y el momento en kN·m.

Finalmente, resolviendo la subestructura que se muestra en la Figura 6.20, bajo las cargas que se indican, se obtiene la solución de la estructura completa. Una vez resuelta matricialmente, los movimientos de los nudos resultan:

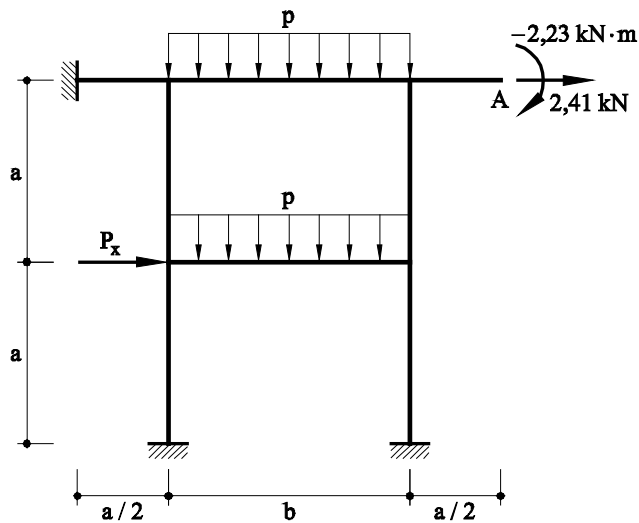


Figura 6.20: Subestructura a resolver matricialmente

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}109 \\ -2{,}37 \\ -6{,}00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \qquad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}062 \\ -2{,}13 \\ 11{,}00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6{,}09 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \qquad \mathbf{d}_5 = \begin{bmatrix} u_5 \\ v_5 \\ \varphi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}22 \\ -1{,}54 \\ -5{,}71 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\mathbf{d}_6 = \begin{bmatrix} u_5 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}29 \\ -1{,}43 \\ 4{,}74 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

La numeración de los nudos puede verse en la Figura 6.21. Los desplazamientos se expresan en metros y los giros en radianes. Las reacciones de la estructura en los nudos empotrados 1,7 y 8 resultan:

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4{,}26 \\ -2{,}31 \\ -0{,}514 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_{x7} \\ F_{y7} \\ M_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}670 \\ 42{,}70 \\ 0{,}218 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_{x8} \\ F_{y8} \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}82 \\ 39{,}60 \\ 4{,}72 \end{bmatrix}$$

donde las fuerzas se expresan en kN y los momentos en kN·m.

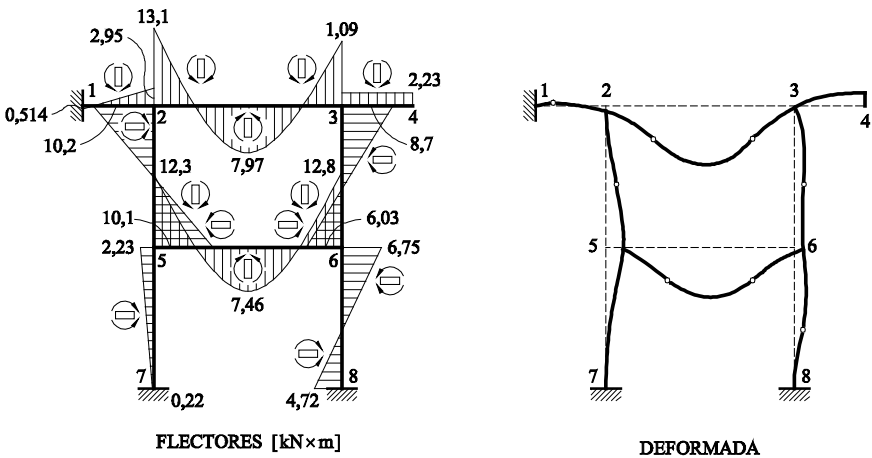


Figura 6.21: Ley de momentos flectores y deformada de la estructura del ejemplo 6.5.2

En la figura 6.21 puede verse la ley de momentos flectores y la deformada de la estructura del Ejemplo 6.5.2.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Cervera Ruiz; M. y Blanco Díaz, E.
Mecánica y Resistencia de Materiales
Ed. CIMNE, 2012.

[2] Cervera Ruiz; M. y Blanco Díaz, E.
Mecánica de Estructuras
Ed. CIMNE, 2014.

[3] Cervera Ruiz; M. y Blanco Díaz, E.
Resistencia de Materiales
Ed. CIMNE, 2015.

[4] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha; M. E. and Witt, R.J.
Concepts and Applications of Finite Element Analysis
Ed. John Wiley, 2002.

[5] Ghali, A.; Neville, A.M. y Brown T.G.
Structural Analysis
Ed. Spon Press, 2003.

[6] Hsieh, Y.Y. and Man, S.T.
Elementary Theory of Structures
Ed. Prentice Hall, 1995.

[7] Kardestuncer, H.
Elementary Matrix Analysis of Structures
Ed. McGraw-Hill, 1974.

[8] Livesley, R.K.
Métodos Matriciales para Cálculo de Estructuras.
Ed. Blume, 1970.

[9] Miquel Canet, J.
Resistencia de Materiales y Estructuras
Ed. CIMNE, 2012.

[10] West, H.H y Geschwinder, L.F
Fundamentals of Structural Analysis
Ed. John Wiley, 2002.

AUTORES

ELENA BLANCO DÍAZ

Doctora Ingeniera de Caminos, Canales y Puertos por la ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona. Catedrática de Escuela Universitaria en Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Profesora del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de C, responsable de asignaturas relacionadas con el cálculo de estructuras. Ha desarrollado su actividad profesional en la empresa privada durante más de dos décadas, participando en numerosos proyectos de Ingeniería Civil.

MIGUEL CERVERA RUIZ

Doctor Ingeniero de Caminos Canales y Puertos por la ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona. Doctor of Philosophy in Civil Engineering por la Universidad de Gales. Catedrático en Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la UPC. En el 2012 recibió el “Premio a la Trayectoria Docente” del Consejo Social de la Universidad Politécnica de Cataluña y la “Distinción Jaume Vicens Vives a la Calidad Docente Universitaria” del Departamento de Economía y Conocimiento de la Generalitat de Catalunya.

BENJAMÍN SUÁREZ ARROYO

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos por la ETS de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona. Catedrático del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Universidad Politécnica de Cataluña. Ha dirigido diversos proyectos de educación asistida por ordenador en el campo de análisis y diseño de estructuras en la Ingeniería. Ha publicado numerosos trabajos en revistas y actas de congresos nacionales e internacionales sobre el desarrollo y aplicación del método de elementos finitos en el ámbito de la ingeniería civil y el análisis de estructuras.

En este libro se exponen de forma clara y rigurosa los principios en los que se fundamenta el Análisis Matricial de Estructuras, destacando especialmente el desarrollo del Método de Rigidez, en el que se basan la casi totalidad de los programas modernos de Análisis de Estructuras por ordenador.

La comprensión de los diferentes temas viene facilitada por la inclusión de la resolución detallada de numerosos ejemplos.

Centro Internacional
de Métodos Numéricos en Ingeniería

UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

Generalitat de Catalunya